MatheMagie

verzameld

door

Maarten Pennings

18 november 1991

achtste+ [6 sep 2006: ps fixes] [11 aug 2007: ps fixes]

Mathe Magie

Inhoud

Mathe
Magie

Intermezzo's

MatheMagie

Inleiding

In deze monografie heb ik enkele aardige wiskundige grapjes verzameld. Het enige criterium om een opgave op te nemen was: ben *ik* er door beziggehouden, vandaar de diversiteit. Een aantal anekdotes stammen al van ver voor de Grieken: liegende mensen met waarheid sprekende broertjes, graankorrels op schaakborden of cirkelredeneringen, het is allemaal klassieke koek.
Sommige van de puzzels zijn echter te wijten aan het door mij genoten moderne onderwijs. Als leraren maar lang genoeg praten over worteltrekken en grootste gemene delers, dan denk je op den duur vanzelf dat je het leuk vindt. Deze scholing draagt ook de schuld van enkele enge "wiskundige" puzzels. Vooral de opgave over derangementen valt op. Ik was echter zó verbaasd dat een woord van n verschillende letters $[\frac{n!}{e}]$ derangementen had, dat ik besloten heb ze op te nemen.

Laat u overigens niet afschrikken door deze kretologie. Hoewel bij sommige opgaven enige voorkennis niet echt overbodig is, zijn andere weer geschikt voor bij het kampvuur. Ik heb gepoogd gelijksoortige problemen bij elkaar te vegen in één hoofdstuk, en ik heb vervolgens gepoogd de hoofdstukken op toenemende droogheid te ordenen.
Nadat in elk hoofdstuk eerst de "opgaven" de revue passeren, volgen enkele hints, antwoorden en intermezzo's. En onthoud, de charme van een vraagstuk openbaart zich pas in volle glorie, als de puzzel u een week lang uit uw slaap heeft gehouden.

Maarten Pennings

Mathe Magie

1 Rekenen, zoals het niet moet

Een kampvuurhoofdstuk. Vertel een fout verhaal zó dat iedereen denkt dat het goed is, trek, als uitsmijter, een logische conlusie die voor alle toehoorders duidelijk fout is, en laat ten slotte iedereen radeloos in zijn sop gaar koken. Goh, wat is wiskunde toch leuk.

1.1 Biechten

Drie arme boeren komen voor het eerst in de grote stad. Geen bekende aldaar, dus spoeden ze zich naar een goedkoop hotel. De eigenaar is boervriendelijk: hij heeft voor hen een driepersoonskamer voor slechts 30 gulden. Dat vinden de boeren billijk, 10 gulden per persoon. Ze betalen en gaan naar boven. Dan bedenkt de hoteleigenaar plots dat hij vergeten is de quantumkorting te verlenen. Een boeking voor drie personen geeft recht op een korting van 5 gulden. En, zoals gezegd, onze man is boervriendelijk. Hij roept de liftjongen, geeft hem 5 guldens en vraagt hem die de boeren te gaan geven.
De liftjongen is wat minder vriendelijk, alhoewel... Hij denkt, wat moeten drie boeren met 5 gulden? Dat kan ik ze toch niet aandoen, 5 gulden is niet deelbaar door 3, dat wordt ruzie. Als ik nu eens 2 guldens houd, dan krijgen ze elk een gulden terug, dat vinden ze vast al heel mooi. Verdien ik ook nog een mooie zakcent. Maar zijn geweten knaagde.
Hij gaf de boeren elk een gulden. De boeren waren verrast over deze service, en bedankten de liftjongen hartelijk. Met wroeging stapte de jongen de lift in. Hij overdenkt zijn zonde: de boeren elk 9 gulden, dat maakt 27, plus die 2 van hem maakt 29. Maar er waren er toch 30? Was Gods wraak zo snel?

1.2 Koeien verdelen

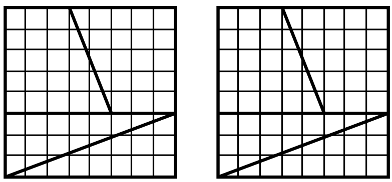
Een paar weken geleden was pa boer overleden. En het testament dat hij naliet... Het was maar goed dat hij zijn drie

zonen een goede opleiding had laten genieten.
Hij had als volgt besloten: zijn oudste zoon zou de helft van de koeien krijgen, de tweede zoon een derde en de jongste zoon een negende. Voor buitenstaanders lijkt dit misschien niet eerlijk, maar versplintering van de bedrijfsactiva is voor niemand goed, en de oudste zoon is de officiële erfgenaam. Kortom, de andere twee waren er nog goed afgekomen. Wat de dochters kregen verhaalt de anekdote niet, en dat zal dus ook wel niet belangrijk zijn voor het vervolg van het verhaal. Er lijkt geen vuiltje aan de lucht. Aan duidelijkheid laat het testament niets te wensen over, ware het niet dat pa boer 17 koeien had. En voor stukken koe had geen der zonen belangstelling. Wat nu gedaan? Zoals gezegd, de zonen hadden een goede opleiding en wisten dus raad.

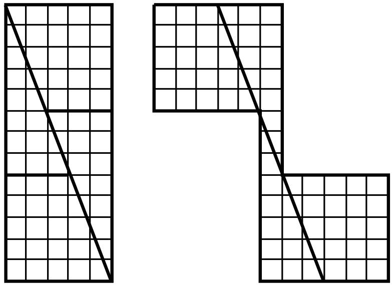
Ze leenden een koe van de buurman. Waarom? Dan hadden ze er 18 en die zijn makkelijk te verdelen. De oudste krijgt er dan $\frac{18}{2} = 9$, de middelste $\frac{18}{3} = 6$ en de jongste krijgt er $\frac{18}{9} = 2$. En de buurman dan, zult u wellicht zeggen? Welnu $9 + 6 + 2 = 17$, dus die geleende koe kan weer terug! Wat vindt u van hun opleiding?

1.3 De overloper

Stel, we hebben twee vierkanten van 8 bij 8 hokjes. Beide worden volgens onderstaand patroon in vieren geknipt:

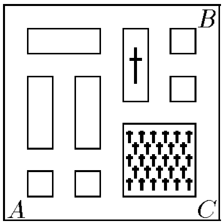


Daarna verschuiven we de acht stukjes en vormen de onderstaande figuren. Dat lijkt eenvoudig, maar toch is er iets merkwaardigs aan de hand. Een blokje is van het rechter figuur (dat bestaat uit twee delen van 5 bij 6 (2×30) plus één van 3 dus in totaal 63 hokjes) naar het linker (van 13 bij 5 dus 65 hokjes) gesprongen. Wat is hier aan de hand?

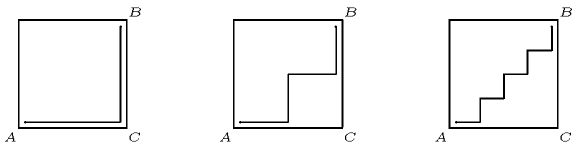


1.4 Omlopen

Waant u zich eens in een middeleeuws stadje. Een begraafplaats, een kerkje, de straten rechttoe, rechtaan, en u als toerist die van A naar B moet:

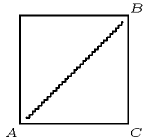


Een vriendelijke dorpskenner zal u natuurlijk de eenvoudigste weg wijzen: via C. Slimmeriken die de weg kennen gaan zelf wellicht binnendoor: voor het kerkhof links, na het kerkhof rechts en ten slotte de tweede links. Of nog sneller (nog meer zigzaggend): eerste links en meteen weer rechts, bij de T-splitsing bij het kerkhof links en meteen weer rechts, na de kerk links, weer rechts en op de T-splitsing weer links. Zo ontstaan de volgende wegen:

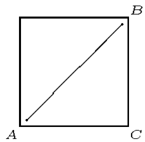


Maar is de derde weg nu werkelijk korter dan de eerste of de tweede? Neen: de lengte van de “verticale” weggetjes is precies gelijk aan de afstand BC, terwijl de lengte van de "horizontale" weggetjes precies gelijk is aan de afstand AC. Totaal dus $AC + BC$. En dat geldt voor alle drie de situaties. U als onschuldige toerist heeft dus precies evenveel gelopen als de gehaaide dorpskenner.

Heeft binnendoor lopen dan helemaal geen zin? Ook niet als we de weg in 31 "trappetjes" zouden onderverdelen:



Nee, tel de totale horizontale en de totale verticale afstand maar weer op en vind $AC + BC$. En wat als we nu *oneindig* veel trappetjes zouden nemen, is de totale weglengte dan ook $AC + BC$ en heeft Pythagoras dan toch iets over het hoofd gezien?



Mathe. Magie Antwoorden

Biechten

Minder bidden en meer denken is de moraal van dit verhaal: 3 keer 9 gulden betaald is 25 gulden voor de kamer plus 2 voor de liftjongen. Niet optellen als aftrekken het motto is...

Koeien verdelen

Dankzij hun opleiding waren ze inderdaad tot deze slimme actie in staat. Echter hun intelligentie hebben ze niet van hun vader geërfd. Hij was, letterlijk, een domme boer:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}=\frac{17}{18}\neq 1$$

met andere woorden: pa boer heeft $\frac{1}{18}$ van zijn erfenis onverdeeld gelaten.

De overloper

Vergelijk de richtingscoëfficiënten van de lijnstukken maar eens: $\frac{2}{5}\neq\frac{3}{8}$. Een of andere oplichter heeft geknoeid met de tekeningen.

Omlopen

Helaas, Pythagoras kunnen we niet onderuit halen. Er is een fundamenteel verschil tussen een trap van “oneindig” veel treden en een rechte lijn (tussen twee punten). In ons voorbeeld heeft de ene echt een lengte van $AC+BC$, terwijl de ander echt een lengte van $\sqrt{AC^2+BC^2}$ heeft.

Moraal van dit verhaal: bereken een limiet nooit door wat benaderingen uit te rekenen. Zelfs als de benaderingen steeds minder verschillen (hier: gelijk zijn) hoeft dat nog niet de limiet op te leveren.

Mathe Magie

2 Rekenen, zoals het wel moet

Nog wat sterke verhalen, voor als het kampvuur begint te doven. In tegenstelling tot de resultaten uit het vorige hoofdstuk zijn in dit hoofdstuk de conclusies wel correct. Alleen, “niemand” gelooft ze.

2.1 De verdwenen decimaal

Voor rationale getallen zijn twee wijdverbreide notaties in omloop. De breuk en de decimale representatie: $\frac{3}{5}$ en $0,567$. Soms duiden ze hetzelfde getal aan: $\frac{2}{10}$ en $0,2$ zijn daar eenvoudige voorbeelden van, $\frac{3}{4}$ en $0,75$ wat ingewikkeldere. Met $\frac{1}{3}$ en $0,\cancel{3}$ hebben de meeste mensen nog meer moeite. Met $0,\cancel{3}$ bedoelen we het repeterende $0,333333\ldots$.
Hoe weten we nu dat $\frac{3}{4} = 0,75$? Daartoe moeten we van $0,75$ een echte breuk maken: $\frac{75}{100}$ en die moet weer vereenvoudigd worden. Daar de grootste gemene deler van 75 en 100 gelijk aan 25 is delen we teller en noemer door 25. We vinden dan: $\frac{75/25}{100/25} = \frac{3}{4}$.

Hoe lossen we dit probleem op bij $0,\cancel{3}$? Daarvoor hebben we de volgende truc. Noem deze waarde x. We weten dan dat $10x = 3,\cancel{3}$. En deze twee vergelijkingen trekken we van elkaar af:

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 3,\cancel{3} \\ x & = & 0,\cancel{3} \\ \hline 9x & = & 3 \end{array} \quad -$$

dus $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
Voor “moeilijkere” decimale breuken als $0,\cancel{6}\cancel{3}$ gaat het proces vrijwel analoog:

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 63,\cancel{6}\cancel{3} \\ x & = & 0,\cancel{6}\cancel{3} \\ \hline 99x & = & 63 \end{array} \quad -$$

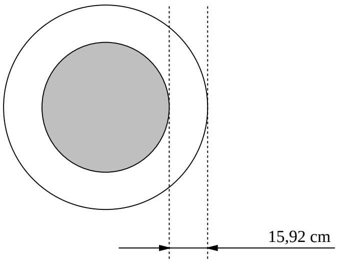
Overtuigd? Deze methode is echt goed. Maar wat vindt u dan van $0,\cancel{9} = 1$! Immers,

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 9,\cancel{9} \\ x & = & 0,\cancel{9} \\ \hline 9x & = & 9 \end{array} \quad -$$

dus $x = \frac{9}{9} = 1$.

2.2 Kort touwtje

Stel, op een bureau staat een kleine wereldbol, met een diameter van 25 cm. Rond deze globe spannen we een touwtje strak rond de "evenaar". Daarna knippen we dit touwtje ergens doormidden en "lassen" een stuk in van 1 meter lang. Als we dit verlengde touw nu weer mooi rond onze globe spannen, hoeveel ruimte zit er dan tussen dit touwtje en de globe? Antwoord: ongeveer 16 cm.



Nu gaan we dit spelletje nóg een keer doen, maar dan met de "echte" aardbol (diameter 12.757 km). Ook hier spannen we een kabel strak rond de evenaar, die we daarna 1 meter verlengen. Hoeveel speling zit er nu tussen de aarde en de kabel?

2.3 De eigenwijze vlieger

Een goede kennis van mij vliegt regelmatig pakjes van Welschap naar Schiphol. Welschap is de luchthaven die tegenwoordig ook wel Eindhoven Airport wordt genoemd. Deze jongeman vliegt altijd op één dag heen en weer en daar doet hij dan een paar uur over. Nu beweerde hij dat als het waait, hij er altijd langer over doet, of hij nu de wind mee of tegen heeft.

Maar ja, als hij wind tegen heeft—op de heenweg!—dan heeft hij hem toch mee op de terugweg? Wat hij dan aan tijd verloren heeft op de heenweg, wint hij toch op de terugweg. Hij vliegt misschien goed, maar heeft duidelijk geen verstand van wiskunde—of moeten we onze theorie aanpassen aan zijn waarneming?

2.4 Jarig

U kent dat wel, die klassen van tegenwoordig. Vroeger, toen had je nog zo'n gezellig clubje van 25 leerlingen of zo (zelf heb ik op de lagere school—oeps basisschool—nog in een klas van twaalf gezeten), maar tegenwoordig$\ldots 35$ is geen uitzondering.
En dat dat overbelasting voor de leerkracht oplevert zal geen verbazing wekken. Denk alleen maar aan al die dagen die verloren gaan aan verjaardagen; 35 stuks per jaar. Dat is dus wel even 40% meer dan bij een klas van 25 leerlingen.

Maar er is hoop. In een klas van 35 leerlingen is de kans dat er minstens twee op dezelfde dag jarig zijn ruim 80%! Of is dit weer een of ander politiek sprookje om de werkdruk van ambtenaren te bagatelliseren?

2.5 Letters husselen

Een bekende middelbare-schoolopgave informeert naar het aantal permutaties van bijvoorbeeld *dag*. Zoals bekend zijn dat er $3!$ (drie faculteit), wat per definitie gelijk is aan $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$: *dag, dga, adg, agd, gad, gda*. Zo bestaan er van het woord *wiskunde* maar liefst 40320 ($8!$) permutaties.
Maar soms willen we goed husselen. Zó goed dat geen der letters op zijn plaats blijft. Hoeveel van die permutaties zonder vaste punten, hoeveel *derangementen* zijn er van het woord *wiskunde* (*iskundew* is dus een goede en *iskundwe* een foute

(de *e* blijft staan) permutatie van *wiskunde*)? Het antwoord op deze vraag is niet zo eenvoudig. Er zijn ongeveer drie keer zo weinig derangementen als permutaties van een woord. Zo heeft een woord van 8 verschillende letters bijvoorbeeld 14833 derangementen.

Wat is er nu zo interessant aan dit verhaal? De factor (ongeveer) drie waar we het hierboven over hadden is in de praktijk e. U weet wel, die van $e = 2.71828\ldots$ Het aantal derangementen van een woord van n letters is dan ook

$$\left[\frac{n!}{e}\right]$$

(met de vierkante haken duiden we de normale afronding aan). Kunt u dat bewijzen?

Mathe Magie

Antwoorden

De verdwenen decimaal

Hier is niets aan toe te voegen. Dit verhaal klopt gewoon, $0,\cancel{9} = 1$, daar is niets aan te doen. Misschien gelooft u het zo:

$$1 = \frac{3}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\cancel{3} = 0,\cancel{9}$$

Of heeft u meer vertrouwen in ingewikkelde formules:

$$
\begin{array}{ll}
 & 0,\cancel{9} \\
= & \quad \{ \text{ definitie repeterende breuk } \} \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 9 \left(\frac{1}{10}\right)^i \\
= & \quad \{ \text{ vermenigvuldigen distribueert over optellen } \} \\
 & \displaystyle 9 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \\
= & \quad \{ \text{ omzetten naar standaard machtreeks } \} \\
 & \displaystyle 9 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i - 1 \right) \\
= & \quad \{ \text{ som meetkundige reeks, zie intermezzo } \} \\
 & \displaystyle 9 \left(\frac{1}{1 - 1/10} - 1 \right) \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & \displaystyle 9 \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9} \right) \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & \displaystyle 9 \cdot \frac{1}{9} \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & 1
\end{array}
$$

INTERMEZZO 1
De som van een oneindige meetkundige reeks

De som van een meetkundige reeks met constante c en rede r is, zoals blijkt uit intermezzo 3 op pagina 64:

$$\sum_{i=0}^{n-1} cr^i = c\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Is de rede $|r| < 1$, dan heeft deze som een limiet voor grote n:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} cr^i = \lim_{n\to\infty} c\frac{r^n - 1}{r - 1} = c\frac{-1}{r - 1} = \frac{c}{1 - r}$$

Kort touwtje

Stel we hebben een globe met straal r_1. Als we hier strak een touw om spannen heeft dat een lengte van $l_1 = 2\pi r_1$. Nadat we het touw verlengd hebben heeft het een lengte $l_2 = 2\pi r_2$ die natuurlijk precies 1 meter groter is:

$$1 = \Delta l = l_2 - l_1 = 2\pi r_2 - 2\pi r_1 = 2\pi(r_2 - r_1) = 2\pi\Delta r$$

Dus

$$\Delta r = \frac{1}{2\pi}\text{m} = \frac{100}{2\pi}\text{cm} \approx 15,9\text{cm}$$

En zoals u ziet is dit resultaat onafhankelijk van r_1!

De eigenwijze vlieger

Zijn waarneming is correct, onze theorie klopt niet. Immers, de vlieger heeft langer last dan lust van de wind: hij vliegt langer tegen de wind in dan met de wind mee.

Dat de totale vlucht met wind langer duurt dan zonder illustreren we aan de hand van het volgende voorbeeld. Stel afstand Eindhoven-Amsterdam is $s = 200$ km. Stel de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de lucht is $v_v = 100$ km/uur. Dan vliegt onze piloot er normaal dus $t = \frac{s}{v_v} = \frac{200}{100} = 2$ uur over om heen en nog eens 2 uur over om terug te vliegen. Totaal dus 4 uur.

Stel, er heerst een tegenwind (op de heenweg) van $v_w = 50$ km/uur. Dan heeft ons vliegtuig op de heenweg een snelheid van $v_1 = v_v - v_w = 100 - 50 = 50$ km/uur ten opzichte van de grond en op de terugweg een snelheid van $v_2 = v_v + v_w = 100 + 50 = 150$ km/uur ten opzichte van de grond. De totale reistijd bedraagt dan dus

$$t = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{200}{50} + \frac{200}{150} = 4 + \frac{4}{3} = 5\frac{1}{3} > 4$$

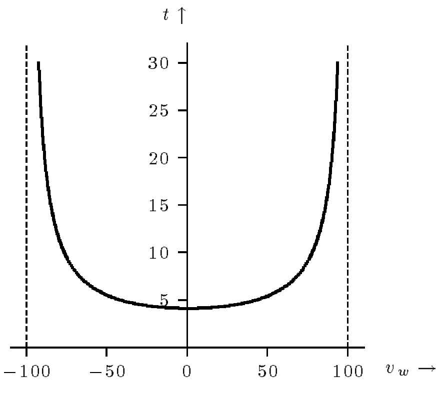
In zijn algemeenheid kunnen we stellen

$$t(v_w) = \frac{s}{v_v - v_w} + \frac{s}{v_v + v_w} = \frac{s(v_v + v_w)}{{v_v}^2 - {v_w}^2} = \frac{2sv_v}{{v_v}^2 - {v_w}^2}$$

zodat, met de door ons gekozen getallen, de volgende functie ontstaat:

$$t(v_w) = \frac{2 \cdot 200 \cdot 100}{100^2 - {v_w}^2} = \frac{40000}{10000 - {v_w}^2}$$

Natuurlijk bekijken we alleen snelheden in het interval $[-100, +100]$ (anders bereikt het vliegtuig nooit zijn bestemming). Uit de grafiek zien we dat $v_w = 0$ de minimale reistijd oplevert.



Jarig

We moeten de kans bepalen dat er minstens twee leerlingen op één dag jarig zijn. Makkelijker is het om de kans te bepalen dat alle leerlingen op verschillende dagen jarig zijn. En aangezien deze situaties elkaars complement vormen is de som van hun kansen precies 1.

Hoe groot is de kans dat alle 35 leerlingen op verschillende dagen jarig zijn? Per definitie is dat het quotiënt van het aantal manieren waarop 35 leerlingen op *verschillende* dagen jarig kunnen zijn en het aantal manieren waarop 35 leerlingen jarig kunnen zijn.
Laten we met dat laatste beginnen. We hebben 35 leerlingen, 365 dagen (voor het gemak; lastpakken die op 29 februari geboren zijn vieren bij ons op school hun verjaardag gewoon op de 28-ste) dus er zijn 365^{35} manieren waarop 35 leerlingen jarig kunnen zijn.
Op hoeveel manier kunnen 35 leerlingen op verschillende dagen jarig zijn? De eerste leerling mag elk van de 365 dagen "uitkiezen" voor zijn verjaardag. Voor de tweede blijven er dan nog maar 364 over; de derde heeft nog slechts de keuze uit $363 \ldots$ Er zijn dus $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 336$ manieren.

$$\begin{array}{ll}
& P\big(\text{van } n \text{ leerlingen zijn er minstens } 2 \text{ op dezelfde dag jarig}\big) \\
= & \quad \{ \text{ complement } \} \\
& 1 - P\big(\text{van } n \text{ leerlingen zijn geen op dezelfde dag jarig}\big) \\
= & \quad \{ \text{ definitie } \} \\
& 1 - \dfrac{\text{het aantal manieren waarop } n \text{ leerlingen op verschillende dagen jarig zijn}}{\text{aantal manieren waarop } n \text{ leerlingen jarig kunnen zijn}} \\
= & \quad \{ \text{ “verstandig tellen” } \} \\
& 1 - \dfrac{365!/(365-n)!}{365^n} \\
\approx & \quad \{ \text{ formule van Stirling, zie intermezzo } \} \\
& 1 - \dfrac{e^{-365} \cdot 365^{365+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}}{e^{-(365-n)} \cdot (365-n)^{365-n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot 365^n} \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
& 1 - e^{-365--(365-n)} \dfrac{365^{365\frac{1}{2}-n}}{(365-n)^{365\frac{1}{2}-n}} \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
& 1 - e^{-n} \left(\dfrac{365}{365-n} \right)^{365\frac{1}{2}-n}
\end{array}$$

INTERMEZZO 2

De formule van Stirling

De formule van Stirling zegt dat voor grote n

$$n! \approx e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}$$

waarbij $f(n) \approx g(n)$ betekent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

en niet

$$\lim_{n\to\infty} f(n) - g(n) = 0$$

Zodat we voor $n = 35$ vinden:

$$\begin{aligned} P &\approx 1 - e^{-35} \left(\frac{365}{365-35}\right)^{365\frac{1}{2}-35} \\ &= 1 - e^{-35} \left(\frac{365}{330}\right)^{330\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - 0,1856 \\ &\approx 81\% \end{aligned}$$

Letters husselen

Het aantal derangementen van een woord van n letters is $[\frac{n!}{e}]$. In woorden, de afgeronde waarde van n faculteit gedeeld door e. Hierbij is e de bekende constante $e = 2.71828\ldots$

Voor de fanatiekelingen geef ik hieronder het bewijs. Een derangement van de rij getallen $1, 2, \ldots, n$ is een permutatie van deze rij zó dat geen der getallen in zijn originele positie komt. Zij d_n het aantal derangementen van deze rij. Merk op dat $d_1 = 0$ (logisch, niet?) en $d_2 = 1$.

Nu gaan we het aantal derangementen d_n bekijken voor rijtjes $1, 2, \ldots, n$ voor $n > 2$. We onderscheiden twee mogelijkheden. De eerste is die waarbij n verwisseld wordt met een j. We hebben keuze uit $n-1$ j's, en voor elke j moeten de resterende $n-2$ nummers (te weten $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n-1$)

een derangement ondergaan. Dat kan op d_{n-2} manieren. Conclusie: de eerste mogelijkheid levert $(n-1)d_{n-2}$ derangementen.
De tweede mogelijkheid bestaat uit die derangementen waarbij een j naar de $n$de positie verhuist, maar waarbij n *niet* naar de $j$de positie verhuist. In dit geval heeft j een "goede" plaats gekregen, maar n (nog) niet. De getallen $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n-1, n$ moeten dus nog een derangement ondergaan. Wederom zijn er $n-1$ keuzes mogelijk voor j waarna we $n-1$ getallen moeten derangeren: $(n-1)d_{n-1}$ mogelijkheden.

Samenvattend kunnen we stellen dat

$$\begin{array}{lcl} d_1 & = & 0 \\ d_2 & = & 1 \\ d_n & = & (n-1)(d_{n-1}+d_{n-2})\ ,\ n>2 \end{array}$$

Hoe lossen we zo'n recurrente relatie op? Zoals we al in de opgave opmerkten vormen de derangementen een subklasse van de permutaties. Het lijkt daarom niet onverstandig de recurrente relatie

$$c_n \ := \ \frac{d_n}{n!}\ ,\ n \geq 1$$

te beschouwen (volgens de opgave is dit quotiënt c_n ongeveer 3—of e zo u wilt). Substitueren we nu $n!c_n$ voor d_n in de recurrente relatie voor d_n dan vinden we, voor $n > 2$,

$$\begin{array}{ll}
 & d_n = (n-1)(d_{n-1}+d_{n-2}) \\
= & \quad \{ \text{ substitutie } d_n \leftarrow n!c_n \ \} \\
 & n!c_n = (n-1)\big((n-1)!c_{n-1} + (n-2)!c_{n-2}\big) \\
= & \quad \{ \text{ distributie } \} \\
 & n!c_n = (n-1)\cdot(n-1)!\cdot c_{n-1} \ + \ (n-1)\cdot(n-2)!\cdot c_{n-2} \\
= & \quad \{ \ n! = n\cdot(n-1)! \text{ en } (n-1)\cdot(n-2)! = (n-1)! \ \} \\
 & n\cdot(n-1)!\cdot c_n = (n-1)\cdot(n-1)!\cdot c_{n-1} \ + \ (n-1)!\cdot c_{n-2} \\
= & \quad \{ \text{ delen door } (n-1)! \ \} \\
 & nc_n = (n-1)c_{n-1} + c_{n-2} \\
= & \quad \{ \text{ distributie } \} \\
 & nc_n = nc_{n-1} - c_{n-1} + c_{n-2} \\
= & \quad \{ \text{ inverse distributie } \} \\
 & n(c_n - c_{n-1}) = -c_{n-1} + c_{n-2}
\end{array}$$

Dit lijkt misschien geen verbetering maar met

$$b_n \;:=\; c_n - c_{n-1}\;,\; n > 1$$

verkrijgen we een mooi resultaat. Substitueren we nu namelijk b_n voor $c_n - c_{n-1}$ in de recurrente relatie voor c_n dan vinden we

$$\begin{array}{ll} & n(c_n - c_{n-1}) = -c_{n-1} + c_{n-2} \\ = & \qquad \{ \text{ substitutie } c_n - c_{n-1} \leftarrow b_n \ \} \\ & nb_n = -b_{n-1} \\ = & \qquad \{ \text{ delen door } n \ \} \\ & b_n = -\frac{1}{n} b_{n-1} \end{array}$$

Merk op dat $c_1 = \frac{d_1}{1!} = \frac{0}{1} = 0$ en $c_2 = \frac{d_2}{2!} = \frac{1}{2}$ zodat $b_2 = c_2 - c_1 = \frac{1}{2}$.

De oplossing van de recurrente relatie voor b_n is nu kinderspel:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n!}\;,\; n > 1$$

Merk op dat $c_n = c_{n-1} + b_n$ en dus dat

$$c_n = c_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

en dus, daar $d_n = n! c_n$,

$$d_n = n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

ofwel

$$d_n = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}$$

Nu hebben we weliswaar de recurrente betrekking voor d_n netjes opgelost, maar waar blijft nu dat verrassend mooie resultaat? Wellicht herinnert u zich nog de machtsontwikkeling voor e^x (zie eventueel opgave 8.5):

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

en dus heeft $n!e^{-1}$ wel wat weg van d_n. Sterker nog, hun absolute verschil is vrij klein; er geldt namelijk

$$\begin{array}{ll}
 & \left| d_n - n!e^{-1} \right| \\
= & \quad \{ \text{ def } d_n \text{ en machtsontwikkeling voor } e^{-1} \ \} \\
 & \left| n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} - n! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \right| \\
= & \quad \{ \text{ termen wegstrepen } \} \\
 & \left| -n! \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \right| \\
= & \quad \{ \text{ distributie, negatief getal in absoluut strepen } \} \\
 & \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots \\
< & \quad \{ \text{ alternerende reeks met monotoon dalende termen } \} \\
 & \frac{1}{n+1}
\end{array}$$

Conclusie: d_n is het gehele getal dat ten hoogste $\frac{1}{n+1}$ en dus altijd minder dan $\frac{1}{2}$ afwijkt van $n!e^{-1}$. Anders gezegd, we mogen gewoon afronden:

$$d_n = \left[\frac{n!}{e} \right] \ , \ n \geq 1$$

3 Praktische problemen

Mathe Magie

Langzamerhand komen de redelijk echte puzzels, die waar over nagedacht moet worden. We beginnen met een zeer bekende.

3.1 De twee broertjes

Een eenzame reiziger struint door een verlaten en mistroostig landschap. Eigenlijk is hij verdwaald, maar zolang de weg zich niet vertakt, wordt hij daar niet al te duidelijk mee geconfronteerd. Als het goed is komt hij straks op een T-splitsing, waar een grillige oude treurwilg moet staan. Zo was hem tenminste verteld. En van daar af kon hij gewoon de borden volgen, richting Malave, want daar moest hij heen.
Maar o, rampspoed, daar was de T-splitsing, mét de wilg, maar de richtingaanwijzer lag er afgebroken, verweerd en nauwelijks meer leesbaar onder. “Malave” had er eens met heldere witte letters gestaan, maar moest hij nu rechts- of linksaf?
Twee boerenzonen kwamen er aan. Dé twee boerenzonen voor wie ze hem nog expliciet gewaarschuwd hadden, eeneiige tweelingen dat zag je inderdaad zo. De één spreekt altijd de waarheid, de ander nooit, zo was hem verteld. Maar wie was wie? En hoe vind je dan uit wat de juiste weg is?
Maar onze reiziger was een wijs man. Hij koos willekeurig een van beiden en vroeg: “Bent u een kikker?” De jongeman antwoordde ontkennend. Met een gerust hart kon de verdwaalde reiziger toen vragen of rechts de weg naar Malave was. (Had de jongeman bevestigend geantwoord, dan had hij de tweede vraag aan diens broer gesteld.)

Kortom, een eenvoudig probleem. Laat ik het wat moeilijker maken. De enscenering blijft gelijk, maar u mag nog maar één vraag stellen, om de juiste richting te bepalen.

3.2 De drie broertjes

De twee broertjes uit het vorige verhaal blijken twee derde van een eeneiige drieling te zijn. Broertje drie was altijd opgesloten geweest omdat hij zo wispelturig is. Soms spreekt hij de waarheid, soms niet. Er is werkelijk geen peil op te trekken.
Z'n consequente broertjes hadden vroeger nog hoop dat het goed zou komen, maar daar is al die jaren niets van gebleken. Vandaar dat hij nu maar vrij rondloopt; gewoon zijn andere twee broertjes achterna.

Denkt u nu eens in dat ú die eenzame reiziger uit het vorige verhaal bent, en dat u nu op de T-splitsing de drie broertjes tegenkomt. U mag ditmaal twee vragen stellen om de juiste weg te vinden.

3.3 Klokken en wijzers

Om twaalf uur 's nachts wijzen alle drie de wijzers (de kleine, de grote en de secondewijzer) van een (analoge) klok in dezelfde richting. Hoe laat doen ze dat voor het eerst weer?

3.4 Een kat op reis

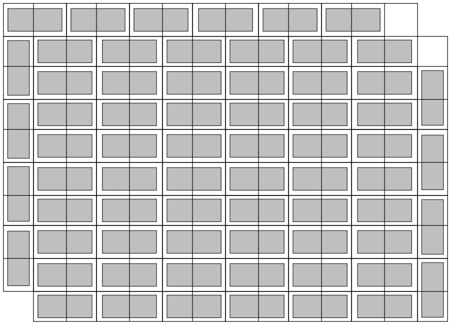
Stel, u bent een kat. Moet kunnen niet? Maar dan wel zo'n gore zwerfkat, een van het type dat slaapt in goederenwagons, en wel op het Maastrichter station. Waarom daar, vraagt u zich af? Welnu, u weet daar een fantastische slager, dicht bij het station, die nog al eens stukken koe op zijn binnenplaats neerlegt als z'n koelcellen weer eens vol zijn. Wat wil je als kat nog meer dan bikken en pitten?

En dan op een morgen gebeurt het weer. Het zijn de risico's van het vak, dat wel, maar het blijft vervelend. Ze hebben uitgerekend die wagon waarin u lag te pitten aangekoppeld voor de trein naar Amsterdam. En na die wilde party met die rooie poes van de bakker gisteravond had u wat moeite met wakker worden: de trein is al vertrokken.
En Amsterdam, met al dat tuig, dat is maar niets. En dan nog die slager daar in Maastricht, nee, u wilt zo snel mogelijk

terug. Maar deze trein doet er 2 uur en 30 minuten over; en de terugweg, dat is nog erger: 2 uur en 39 minuten (vanwege die aankoppeltoestand in Sittard of zo). En om nu ruim 5 uur niets te eten...
Maar u heeft al voor hetere vuren gestaan, u weet hoe u uw reistijd met ongeveer de helft kunt verkorten. Op hetzelfde moment dat de trein van Maastricht naar Amsterdam (waar u dus nu "toevallig" vertoeft) vertrok, vertrok er ook een trein in Amsterdam richting Maastricht. Ongeveer halverwege—precies is dat nooit te zeggen want de treinen rijden niet overal even hard, en ze stoppen niet overal even lang—rijden ze elkaar voorbij (met zo'n 138 km/uur had u wel eens horen vertellen).
En dan komt de actie, die onder ervaren treinkatten eufemistisch overstappen wordt genoemd: u springt eenvoudig van de trein naar Amsterdam op de trein naar Maastricht. Het blijft mikken, maar het moet lukken. Bent u in staat om met de vermelde gegevens een betrouwbare schatting te maken van uw totale reistijd?

3.5 Een nieuwe keuken

Een vriendje van mij had een mooi groot huis met een ruime keuken gekocht. Hij houdt echter niet van zeil, dus de keuken moest betegeld worden. De keuken meet 10 bij 14 voet (ik kan er ook niks aan doen dat de architect slechte natuurkunde heeft gehad). Maar er moet nog een prullenbak en een kruidenrek in. Beide apparaten meten precies 1 bij 1 voet. De prullenbak komt in de noordoosthoek van de keuken te staan en het kruidenrek in de zuidwesthoek.
Tot dusver geen problemen. Mijn vriendje zoekt dus een mooie tegel uit—iets met roze rozen op een witte achtergrond—met de afmeting 1 bij 2 voet. Vol goede moed gaat hij naar huis om de keuken te betegelen. Domweg begint hij de tegels te leggen:



En u ziet het al, het gaat mis. Kunt u het wel? Laat ik u helpen: neen. Maar kunt u dát bewijzen?

3.6 Genieten van getallen

De natuurlijke getallen $0, 1, 2 \ldots$ worden al eeuwen lang als mysterieus zoniet mystiek ervaren. Zelfs doorgaans aardse wiskundigen wijdden delen van hun leven aan het verzamelen van getalseigenschappen

0 Tja, wat is er niet bijzonder aan nul. Het is het kleinste getal, het is deelbaar door elk ander getal, het is het eenheidselement van optelling ($a + 0 = 0$ voor alle a), het is het kleinste even getal, een kwadraat...

1 Oneven, eenheidselement van vermenigvuldigen, een kwadraat...

2 Het enige even priemgetal.

3 Het kleinste oneven priemgetal. Het kleinste getal waarvoor er een magisch vierkant bestaat

8	1	6
3	5	7
4	9	2

tenzij u $\boxed{1}$

ook al goed vindt.

4 Een kwadraat en trouwens ook een macht van twee.

5 Een priemgetal. Het kleinste Pythagorasgetal (een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan de som van twee andere kwadraten: $5^2 = 4^2 + 3^2$).

6 Een perfect getal (de som van zijn delers (zonder het getal zelf) 1, 2 en 3 in dit geval, is gelijk aan het getal zelf).

7 Een priemgetal.

Nu lijken kreten als “priem” en “tweemacht” vergezocht. Maar toch is 1024 (2^{10}) een mooi getal. Merk bovendien op dat dit soort getallen steeds dunner gezaaid zijn; tussen 2^{10} en 2^{11} zitten 1023 getallen.
Dat wiskundigen zich met dit soort “onzin” bezighouden moge blijken uit de volgende anekdote. Hardy, een Engels wiskundige, vertelde de Indische wiskundige Ramanujan op diens ziektebed dat de taxi die hem bracht een saai nummer had: 1729. Hiertegen trok Ramanujan natuurlijk fel van leer. Het is immers het kleinste getal dat op twee manieren te schrijven is als de som van twee derde machten: $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$.
Zijn er eigenlijk wel oninteressante getallen?

3.7 De smurfenstory

Men neme een dorp met smurfen, veel smurfen. Zoals bekend dragen alle een wit hoofddeksel op één na, die is in het rood. Afwijken van een groep kan alleen maar als je macht hebt, en deze smurf is dan ook de baas van het dorp.
Op zekere dag komt deze oppersmurf op het onzalige idee de wiskundekennis van zijn volk te testen. Hiertoe laat hij elke smurf apart bij zich komen, legt de spelregels van het spel dat hij verzonnen heeft uit en bindt een kwastje aan de muts van de smurf vast—of niet, dat weet de onderdaan niet.
Hoofdspelregel is dat een smurf niet aan een andere smurf mag vragen of hij een kwastje aan zijn muts heeft of niet: geen onderlinge communicatie. Spiegels bestaan niet in de smurfenwereld, mutsen worden nooit afgezet, kortom, een smurf weet niet of hij in het bezit is van een kwastje. Wel kan hij zien of andere smurfen een kwastje hebben en de

grote smurf—zo heet de oppersmurf in het lokale dialect—heeft beloofd dat er minstens één smurf is met een kwastje (de tweede spelregel).
Doel van het spel, u voelt het natuurlijk al aankomen, is dat elke smurf moet bepalen of hij een kwastje heeft. Maar daar is meer informatie voor nodig. Daarom zal de grote smurf elke morgen, bij zonsopgang, op de gong slaan, te beginnen na de eerstvolgende nacht met een volle maan. Alle smurfen moeten dan in een grote kring gaan staan en misschien nog even goed naar elkaars kwastjes kijken. Als de grote smurf n kwastjes heeft uitgedeeld, dan moeten op de morgen van de n-de gong, alle smurfen mét een kwastje de kring binnen komen (de derde spelregel). En dan is het spel afgelopen.

Gelukkig werd de grote smurf op de n-de morgen niet teleurgesteld, alle smurfen met een kwastje stonden in de kring, en de rest stond nog braaf erbuiten. De "gewone" smurfen bedongen wel dat het voortaan afgelopen moest zijn met dit soort flauwe kul, en daar stemde de grote smurf tevreden mee in. Zou u de strategie voor een gewone smurf kunnen bepalen, zodat hij zonder kleerscheuren uit deze ellende komt?

Antwoorden

Mathe.
Magie

De twee broertjes

Ik ken drie mogelijke oplossingen voor dit probleem. De eerste bestaat eruit dat het antwoord door beide broers “gefilterd” wordt zodat het precies één keer ontkend wordt:

> *“Zou je broer zeggen dat links de goede weg is?”* of wat binairder geformuleerd: *“Als ik je broer zou vragen of links de goede weg is, zou hij dan ‘ja’ antwoorden?”*

vraag je aan willekeurig één van de twee. Op deze manier wordt het antwoord of door de bevraagde “verlogen” of door diens broer. Als het antwoord dus “nee” is, dan is links de goede weg. En zo “ja”, dan moet je rechtsaf.
Wordt bij het vorige geval het antwoord gefilterd door *liegen waarheid* of door *waarheid liegen* bij de komende oplossing filteren we door hetzij *waarheid waarheid*, hetzij door *liegen liegen*. En dubbel liegen is hetzelfde als dubbel waarheid spreken.

> *“Als ik jou tien minuten geleden gevraagd had of links de goede weg is, zou je dan ‘ja’ gezegd hebben?”*

vraag je aan willekeurig een van de twee. Is *‘ja’* het antwoord dan ga je linksaf, bij *‘nee’* naar rechts.
Voor wiskundigen, die van puzzelen en moeilijke vragen houden de volgende intrigerende variant (anderen raadplege de tabel):

> *“Is het antwoord op de vraag ‘Ben jij de waarheidspreker’ hetzelfde als het antwoord op de vraag ‘Is links de goede weg’?”*

Ondervraagde	eerlijk	eerlijk	lieger	lieger
Goede weg	links	rechts	links	rechts
“Ben jij de waarheid-spreker?”	ja	ja	ja	ja
“Is links de goede weg?”	ja	nee	nee	ja
Gelijk	ja	nee	nee	ja
“Hetzelfde?”	ja	nee	ja	nee

De drie broertjes

Hopelijk heeft u het antwoord—inclusief methode drie—op de vorige vraag gelezen (en begrepen), want dit verhaal wordt een harde dobber. De eerste methode die bij de vorige opgave gepresenteerd wordt is onbruikbaar: *het* andere broertje bestaat nu niet. Sommige mensen hebben bezwaar tegen het gebruik van de tweede methode, in het bijzonder bij de wispeltuur: hoe moet die nou weten wat hij tien minuten geleden zou zeggen, zo redeneren zij. Kortom, hier beperken we ons tot de derde methode.

Voor het gemak nummeren we de broertjes 1, 2 en 3. Aan nummer 1 vragen we, op die ingewikkelde manier, of broer 2 de wispeltuur is:

> *“Is het antwoord op de vraag ‘Ben jij de waarheidspreker’ hetzelfde als het antwoord op de vraag ‘Is broer 2 de wispeltuur’?”*

Als u zelf gepuzzeld heeft op dit probleem is het u ongetwijfeld opgevallen dat de wispeltuur de meeste problemen genereert. We onderscheiden nu dan ook de gevallen waarin broer 1 al dan niet de wispeltuur is.

- Stel dat broer nummer 1 niet de wispeltuur is. We hebben dan de vraag aan de waarheidspreker of de lieger gesteld, zodat we dus een correct antwoord krijgen.

  nee betekent dat broer 2 niet de wispeltuur is.

  ja betekent dat broer 3 *niet* de wispeltuur is.

- Stel dat broer nummer 1 wel de wispeltuur is. In dit geval weten we zeker dat broertjes 2 en 3 niet de wispeltuur zijn en dus ook dat bij

nee broer 2 niet de wispeltuur is, en dat bij

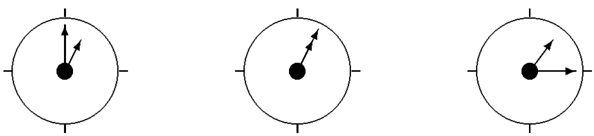
ja broer 3 niet de wispeltuur is.

Het aardige is nu, dat ongeacht het geval waarmee we te maken hebben, *we zeker weten* dat broer 2 niet de wispeltuur is bij een *'nee'* antwoord en dat broer 3 niet de wispeltuur is bij een *'ja'* antwoord. Om dus een betrouwbaar antwoord te krijgen op de vraag *"Is links de goede weg?"* moeten we deze stellen aan broer 2 bij een *'nee'* en aan broer 3 bij *'ja'*. Uiteraard weer ingewikkeld geformuleerd, want we weten niet of we met de lieger of de waarheidspreker te doen hebben:

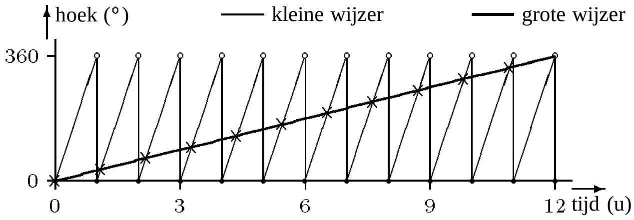
> *"Is het antwoord op de vraag 'Ben jij de waarheidspreker' hetzelfde als het antwoord op de vraag 'Is links de goede weg'?"*

Klokken en wijzers

We bekijken eerst wanneer de grote en de kleine wijzer in dezelfde richting wijzen. Hiertoe delen we één volledige rondgang van de kleine wijzer in twaalf gelijke delen (van elk 1 uur dus).
In de eerste periode van (en met) 0:00 tot (en *zonder*) 1:00 vallen de twee wijzers 1 keer samen (op het saaie tijdstip 0:00). Ook in de periode van 1:00 tot 2:00 vallen de wijzers 1 keer samen. Immers, om 1:00 staat de grote wijzer vóór de kleine en om 1:15 staat hij erna. De klok is analoog dus bewegen de wijzers continu en dus vallen ze op het interval 1:00 – 1:15 één keer samen.



Ook in de periodes van 2:00 tot 3:00, van 3:00 tot 4:00, . . . en van 10:00 tot 11:00 vallen de wijzers een keer samen. Alleen in de periode van (en met) 11:00 tot (en zonder) 12:00 haalt de grote wijzer de kleine net niet meer in. In onderstaande grafiek zijn de tijdstippen waar de twee wijzers samenvallen met een kruisje gemarkeerd.



Dus op een tijdspanne van twaalf uur vallen de grote en de kleine wijzer elf keer samen. Dat is dus om de $\frac{12}{11}$ uur ofwel iedere $\frac{720}{11}$ minuut.
Voor de secondewijzer en grote wijzer kunnen we een analoog betoog houden. Hier delen we een rondgang van de grote wijzer natuurlijk in 60 periodes, en alleen in de laatse vallen de twee wijzers niet samen, in de overige 59 wel. Kortom, de secondewijzer en de grote wijzer vallen om de $\frac{60}{59}$ minuut samen.
Om van die breuken af te zijn voeren we een nieuwe tijdseenheid in, laten we die de *jot* noemen. En we definiëren één minuut als $59 \times 11 = 649$ jots. De kleine en de grote wijzer vallen dus elke $\frac{720}{11} \times 649 = 42480$ jots samen, terwijl de secondewijzer en de grote wijzer elke $\frac{60}{59} \times 649 = 660$ jots samenvallen.
Wanneer vallen de drie wijzers nu (alle drie) samen? Hiertoe moeten we het kleinste gemene veelvoud van 42480 en 660 bepalen. En dat is 467280, zie eventueel intermezzo 6 op pagina 85. Dus na 467280 jots ofwel $\frac{467280}{649} = 720$ minuut vallen de drie wijzers samen. Dat is dus na precies 12 uur. Saai hè?

Een kat op reis

Als u niet op de minuut af een schatting van de reistijd heeft met een foutenmarge van 0, dan mag u niet verder lezen.

De kat begon zijn reis op hetzelfde moment dat de trein van Amsterdam naar Maastricht begon te rijden (gegeven). Wat de treinen onderweg allemaal doen of wat de kat onderweg allemaal doet, is onbelangrijk, belangrijk is dat de kat met die trein uit Amsterdam op het station in Maastricht aankomt.

En dat doet-ie dus 2 uur en 39 minuten later (zoals gegeven). Dat is zijn exacte reistijd, en niet anders.

Een nieuwe keuken

Het is vrij eenvoudig in te zien dat de keuken niet betegeld kan worden met de 2 bij 1 tegels. We schilderen hiertoe de keukenvloer als een schaakbord, met bijvoorbeeld de prullenbak op een zwart hokje. Dan is het hokje naast de prullenbak wit, die daarnaast weer zwart, en zo verder. Het meest rechter hokje op de onderste rij is dus wit (want het totale aantal hokjes is 14, dus even). Omdat er verticaal ook een even aantal hokjes is (10) staat het kruidenrek ook weer op een zwart hokje.
Wat hebben we hier aan? Merk op dat er $\frac{14 \cdot 10}{2} = \frac{140}{2} = 70$ witte hokjes zijn en dus slechts 68 zwarte (want die andere twee zijn bedekt door het kruidenrek en de prullenbak). Als we dan ook nog bedenken dat elke tegel, waar we hem ook neerleggen, op precies één wit en één zwart hokje komt te liggen, dan zullen er op het eind altijd twee witte hokjes overblijven (de zogeheten *invariant* tijdens het betegelen is: het aantal onbedekte witte hokjes minus het aantal onbedekte zwarte hokjes is twee). En die liggen op z'n best schuin tegen elkaar zodat er nooit een tegel op past.

Genieten van getallen

Natuurlijk zijn er geen oninteressante getallen. Stel dat die er wel waren, dan was er ook een kleinste. En als u die niet interessant zou willen noemen...

De smurfenstory

Elke smurf weet van elke andere smurf of deze een kwastje heeft. Alleen over zijn eigen bezit tast hij in het duister. Maar dat lost hij met volledige inductie op. De inductiehypothese is dat bij de n-de gong ($n \geq 1$) er minstens n kwastjes zijn. De basis klopt dus want de grote smurf heeft beloofd dat er minstens één smurf met kwastje rondloopt.
Een smurf die n kwastje ziet wordt de n-de dag waakzaam. Er zijn dan twee mogelijkheden. Of hij heeft geen kwastje

en dan mag hij dus niet naar het midden lopen. Of hij heeft wel een kwastje, maar dan zijn er $n + 1$ uitgedeeld dus mag hij op de n-de dag niet naar voren komen. Conclusie: onze held wacht nog een dag. Op de $n + 1$-ste dag moeten er dus (hypothese) ten minste $n + 1$ kwastjes in omloop zijn. Onze held ziet er echter maar n en dus moet hij er zelf ook een hebben. Hij stapt dus de kring binnen.

4 Logisch

Op het programma staan nu een zestal logische problemen. “Barbertje zal hangen” is—zij het dan misschien weer net iets anders verpakt—hét schoolvoorbeeld van dit genre. De meest compacte versie is wellicht $\boxed{\text{de omkaderde zin is niet waar}}$.

4.1 Barbertje zal hangen

Barbertje, beticht van allerlei vreselijke zaken, staat terecht voor een sadistisch tribunaal. “Spreek! En de waarheid, of je mocht nog hopen dat je onthoofd werd.” wordt hem bij tijd en wijle toegevoegd.
Wurging, door een professionele treuzelaar, hangt hem boven het hoofd als hij de waarheid niet spreekt. Een snelle onthoofding valt hem ten deel als hij goed meewerkt en de waarheid en niets anders dan de waarheid spreekt. En één ding kun je dit tribunaal meegeven, zij houden woord.

Na enige overpeinzingen weet Barbertje het volgende te zeggen: “Ik vind door wurging de dood.” Meer commentaar valt er niet uit hem te folteren. En gefolterd wordt er, want wat moet het tribunaal, woord breken? Immers, wurgen ze Barbertje, dan heeft hij de waarheid gesproken, en moet hij onthoofd worden. Onthoofden ze hem, dan heeft hij gelogen en moet hij gewurgd worden—en langzaam, die onruststoker.

4.2 Geknipt

In traditioneel ingestelde dorpjes, die waar kappers nog barbieren heten, heerst de gewoonte dat de barbier alleen die mannen uit het dorp scheert die zichzelf niet scheren. Maar wie, zo luidt de vraag, scheert dan, in dat soort dorpjes, de barbier?

4.3 Veilig vliegen

De kans, dat twee partijen, onafhankelijk van elkaar, een bom meenemen in een vliegtuig, is, zo heeft de praktijk uitgewezen, gelijk aan nul te stellen. Wilt u dus veilig vliegen, dan is het ten zeerste aan te bevelen, een bom mee te nemen.

4.4 Onverwachte proefwerken?

School. Niets zo vreselijk als dat. En dat is voornamelijk de schuld van proefwerken. Zonder die valt het allemaal nog wel mee. Maar als je een proefwerk hebt, dan moet je wel leren. Het toppunt van sadisme is wel het onverwachte proefwerk, dan blijf je studeren, en meestal voor niets.
Maar de leraar is redelijk meegaand. Hij deelt mee dat er een onverwacht proefwerk aankomt, volgende week. Welke dag, dat wil hij natuurlijk niet zeggen, want dan is de lol er helemaal van af, maar op één van de vijf schooldagen van volgende week, totaal onverwacht, is het raak.

Slim als ze van al die proefwerken zijn geworden, denken de leerlingen: “Ha, dan is het proefwerk dus niet op vrijdag.” Als het wel op vrijdag zou zijn, dan hebben we de eerste vier dagen geen proefwerk, en dan weten we donderdagavond dus dat het proefwerk vrijdag is. Maar dan is het niet onverwacht meer, en dat had de leraar beloofd, en dat kan dus niet. Vrijdag valt dus af.
Maar ja, met vrijdag geëlimineerd, als ze maandag, dinsdag of woensdag geen proefwerk hebben gehad, moet het dus wel op donderdag komen. Maar dat is wederom niet onverwacht, dus donderdag valt ook af.
En zo verder redenerend elimineren ze ook nog woensdag, dinsdag en maandag, en komen ze tot de conclusie dat er helemaal geen proefwerk komt. Wie schetst dan ook hun verbazing als ze op woensdag hun proefwerkblok te voorschijn moeten halen.

4.5 Het over-en-weerwoord

Een talentvolle doch niet zo welgestelde jongeman had het idee opgevat een goede advocaat te worden. Hij was daarom zeer gelukkig toen een beroemd advocaat zich bereid verklaarde hem in de leer te nemen. Weliswaar was de geldelijke vergoeding wat aan de hoge kant, maar omdat de advocaat vertrouwen had in het talent van zijn pupil en, niet te vergeten, zijn eigen educatieve vaardigheden, was hij bereid de volgende regeling te treffen. De helft van het verschuldigde lesgeld moest vooraf betaald worden, de andere helft pas achteraf, maar alleen dan als de jongeman zijn eerste eigen rechtszaak zou winnen. En zo werd het contract opgesteld.

Hij was ambitieus en toegewijd en maakte snel vorderingen. Desalniettemin bleek hij, eenmaal klaar met zijn opleiding, niet bereid een rechtszaak aan te nemen. Natuurlijk begon zijn opleider te vermoeden dat dit een truc was om de rest van het leergeld niet te hoeven betalen. En dus spande hij een rechtszaak aan om het restant te vorderen. Verliezen kon hij niet, zo had hij bedacht.
“Immers”, zo pleitte hij voor de rechter, “het doet er niet toe of ik deze zaak win of verlies. Want als U mij in het gelijk stelt, edelachtbare, dan is de gedaagde mij, volgens Uw uitspraak de tweede helft van het leergeld verschuldigd. Besluit U in mijn nadeel, edelachtbare, dan heeft de tegenpartij haar eerste zaak gewonnen, en moet zij dus, volgens het contract, het tweede deel betalen.”
Maar de gedaagde antwoordde: “Ik had natuurlijk een goede advocaat in de arm kunnen nemen, maar mijn voldoening is natuurlijk groter als ik U zelf versla, sluwe leermeester, niet alleen in deze rechtszaak, maar ook bij ons meningsverschil over het resterende leergeld. Want, mocht de rechter mij in het gelijkstellen, dan ben ik, volgens het vonnis, U niets verschuldigd. Maar stelt hij U in het gelijk, dan heb ik mijn eerste zaak verloren, en ben ik U, volgens ons contract, ook niets verschuldigd.”
De rechter, bang dat zijn vonnis zichzelf zou tegenspreken, hield wijselijk zijn mond, en verdaagde de zaak naar een—veel, véél—later tijdstip.

4.6 Multiple choice

Over twee dingen zijn alle leerlingen het eens: leraren deugen niet en een multiple choice test—meerkeuzenproefwerk voor de xenofoben onder ons—is makkelijk. Een leraar wist dat laatste vooroordeel te ontzenuwen, maar dat eerste staat nu nog steviger dan voorheen:

Kruis het beste antwoord aan. Indien u geen of meerdere antwoorden aankruist wordt de opgave fout gerekend.

- ☐ $1 + 1 = 2$
- ☐ $3 \times 16 = 48$
- ☐ $1 + 3 = 9$
- ☐ Precies 2 antwoorden zijn goed.

Mathe Magie

Antwoorden

Barbertje zal hangen

Een geval van een wijdverbreid logisch probleem waarvan "ik lieg nu" de eenvoudigste is. Ze staan bekend als *antimonieën*. De ellende ontstaat doordat de uitspraken naar zichzelf verwijzen.

> *Markthandelaren liegen altijd! Aangenaam kennis te maken, Kareltje Kraam, markthandelaar.*
>
> *De volgende zin is onwaar. De vorige is waar.*
>
> *Er staan drie foutten in deeze zin.*

Geknipt

Geen dorp kan een barbier hebben die alle mannen scheert die zichzelf niet scheren. De *premisse* (veronderstelling) deugt niet.

Veilig vliegen

De kans, dat twee partijen, onafhankelijk van elkaar, allebei dubbel-zes gooien met twee dobbelstenen is redelijk klein ($\frac{1}{1296} \approx 0,08\%$). Wil je dus voorkomen dat de ander dubbel-zes gooit, dan is het ten zeerste aan te bevelen, jouw dobbelstenen met de zessen omhoog te leggen. Ja, ja ...
Dat kans dat de andere partij dubbel-zes gooit (een bom meeneemt) is onafhankelijk van het feit dat ik dubbel-zes gegooid heb (een bom meegenomen heb).

Onverwachte proefwerken?

De leerlingen komen tot de conclusie dat ze vrijdag geen proefwerk kunnen krijgen onder de aanname dat ze er *donderdag nog geen gehad hebben*. Van daar uit verder redenerend komen ze tot de conclusie dat ze *donderdag* ook geen proefwerk kunnen krijgen. Dat riekt naar cirkelredenering.

Het over-en-weerwoord

Of je vecht het contract aan of niet, maar deze redeneringen rieken naar bedrog. Je legt je neer bij het vonnis van de rechter, niet alleen als hij je in het gelijk stelt.

Multiple choice

We eindigen dit hoofdstuk met dezelfde vraag als waar we mee begonnen: een uitspraak die wat over zichzelf zegt. Een onoplosbaar probleem. Maar mij moet u niet geloven, ik lieg altijd.

Mathe Magie

5 Goed is fout, is fout

Dit hoofdstuk bevat enkele voorbeelden van foutieve “bewijzen”. Velen zijn al eens geconfronteerd met een publikatie met als hoofdstelling $1 = 2$. En in dit hoofdstuk gebeurt niets anders. Wat minder bekend is de meetkundige dependant van deze uitspattingen. Zo schijnt elke driehoek gelijkbenig te zijn.

5.1 Kwadrateren

Laten we maar meteen met de deur in huis vallen. We bewijzen hier dat $2 = 1$. Daartoe stellen we eerst dat $x = y$, dan geldt:

$$
\begin{array}{ll}
 & y^2 = xy \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & x^2 - y^2 = x^2 - xy \\
= & \quad \{ \text{ merkwaardig produkt, buiten haakjes halen } \} \\
 & (x-y)(x+y) = x(x-y) \\
= & \quad \{ \text{ delen door } x - y \ \} \\
 & x + y = x \\
= & \quad \{ \ x = y \ \} \\
 & x + x = x \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & 2x = x \\
= & \quad \{ \text{ delen door } x \ \} \\
 & 2 = 1
\end{array}
$$

5.2 Differentiëren

Wederom bewijzen we dat $2 = 1$.
Stel $N \in I\!N$, dan geldt:

$$
\begin{array}{ll}
 & N = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N} \\
= & \quad \{ \text{ vermenigvuldigen met } N \text{ (distribueert over } +\text{) } \}
\end{array}
$$

$$N \cdot N = \underbrace{N + N + \ldots + N}_{N}$$

$\Rightarrow$ { differentiëren }

$$\tfrac{d}{dN}(N \cdot N) = \tfrac{d}{dN}(\underbrace{N + N + \ldots + N}_{N})$$

$=$ { produktregel, differentiëren distribueert over $+$ }

$$1 \cdot N + N \cdot 1 = \underbrace{\tfrac{d}{dN}N + \tfrac{d}{dN}N + \ldots + \tfrac{d}{dN}N}_{N}$$

$=$ { calculus, $\frac{d}{dN}N = 1$ }

$$2N = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N}$$

$=$ { calculus }

$$2N = N$$

$=$ { delen door N $(N \neq 0)$ }

$$2 = 1$$

5.3 Integreren

Voor de afwisseling bewijzen we $0 = 1$.

$$\int \frac{1}{x} dx$$

$=$ { partieel integreren: $\int f\, dg = fg - \int g\, df$ }

$$\frac{1}{x} \cdot x - \int x\, d\frac{1}{x}$$

$=$ { calculus, differentiëren }

$$\frac{x}{x} - \int x \cdot \frac{-1}{x^2} dx$$

$=$ { delen door x, $-$ distribueert over integreren }

$$1 + \int \frac{x}{x^2} dx$$

$=$ { delen door x }

$$1 + \int \frac{1}{x} dx$$

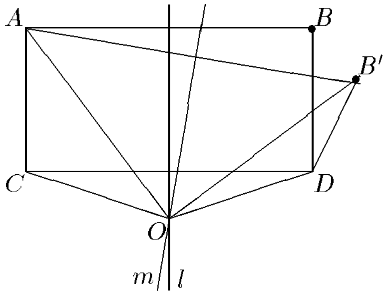
en dus weten we dat

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

en dus geldt $0 = 1$.

5.4 Een stompe rechte hoek

In de serie merkwaardige bewijzen, nu een meetkundig probleem. We bewijzen dat een rechte hoek groter dan 90 graden is.



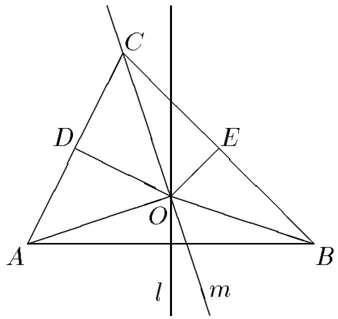
Gegeven een rechthoek $ABCD$. Zoals bekend: een rechthoek heeft vier rechte hoeken. Bij een rotatie om D, met een kleine hoek α gaat punt B over in punt B'. We merken op dat $\angle CDB'$ groter is dan 90 graden (namelijk $90+\alpha$ graden), en dat $DB = DB'$.
We trekken lijnstuk AB' en construeren de middelloodlijnen l op AB en m op AB'. Aangezien l en m niet evenwijdig zijn, zullen ze elkaar snijden, zeg in punt O. Dan tekenen we AO, $B'O$, CO en DO.
De driehoeken $\triangle ACO$ en $\triangle B'DO$ zijn congruent. We bewijzen dat met het congruentiegeval ZZZ:

- $AO = B'O$ want O ligt op de middelloodlijn m van AB'
- $OC = OD$ want O ligt op de middelloodlijn l van AB en dus CD
- $AC = B'D$ want $AC = BD = B'D$

Dus geldt $\angle ACO = \angle B'DO$ (overeenkomstige hoeken van congruente driehoeken). Tevens geldt $\angle DCO = \angle CDO$ (basishoek van de gelijkbenige driehoek $\triangle OCD$). Dus $\angle ACD = \angle ACO - \angle OCD = \angle B'DO - \angle CDO = \angle CDB'$. Dus de rechte hoek $\angle ACD$ is gelijk aan de stompe hoek $\angle CDB'$.

5.5 Elke driehoek is gelijkbenig

Weer een meetkundig probleem. Deze keer bewijzen we dat elke driehoek gelijkbenig is.



Gegeven een driehoek $\triangle ABC$, met middelloodlijn l op AB en bisectrice m van hoek $\angle C$. Lijnen l en m snijden elkaar in O. Uit O trekken we de loodlijn OD op AC en de loodlijn OE op BC. Tevens trekken we de lijnstukken AO en BO. De driehoeken $\triangle COD$ en $\triangle COE$ zijn congruent. We bewijzen dat met het congruentiegeval HZH:

- $\angle DCO = \angle ECO$ want m is de bisectrice van $\angle C$
- $CO = CO$ wat me vrij triviaal lijkt
- $\angle CDO = \angle CEO$ want beide zijn recht

De driehoeken $\triangle AOD$ en $\triangle BOE$ zijn congruent. We bewijzen dat met het semi-congruentiegeval ZZH. Omdat in ons geval de hoek recht is, is het ZZH bewijs voldoende sterk (voor andere hoeken zijn er bij dit geval twee mogelijkheden):

- $AO = BO$ want O ligt op de middelloodlijn l van AB
- $OD = OE$ want dat zijn overeenkomstige delen van de congruente driehoeken $\triangle COD$ en $\triangle COE$
- $\angle ADO = \angle BEO$ want beide zijn recht

$DC = EC$ want dat zijn overeenkomstige delen van de congruente driehoeken $\triangle COD$ en $\triangle COE$. $AD = BE$ want dat zijn overeenkomstige delen van de congruente driehoeken $\triangle AOD$ en $\triangle BOE$.
Dus geldt $AC = AD + DC = BE + EC = BC$, en dus is $\triangle ABC$ gelijkbenig.

5.6 Een 24-urige werkweek

Stel er moet een algoritme ontwikkeld worden dat van een gegeven rij getallen $X[0..N) \to \mathbb{N}$ baalt hoeveel paren een even produkt vormen en hoeveel er een oneven produkt vormen. Formeel betekent dit dat we de volgende eindrelatie moeten realiseren:

$$ep = \left|\{(i,j) \mid 0 \le i < N \ \wedge\ 0 \le j < N \ \wedge\ \text{even}(X[i] \cdot X[j])\}\right|$$

$$op = \left|\{(i,j) \mid 0 \le i < N \ \wedge\ 0 \le j < N \ \wedge\ \text{oneven}(X[i] \cdot X[j])\}\right|$$

Een slechte programmeur lost het als volgt op: hij genereert alle paren en controleert of ze even of oneven zijn. Merk op dat hij zichzelf waarschijnlijk slim vindt—gezien de ingewikkelde guard van de `if` die een vermenigvuldiging uitspaart. Gelukkig is wel eenvoudig in te zien dat het algoritme de gevraagde postconditie realiseert.

```
ep:=0; op:=0;
for i:=0 to N-1 do
  for j:=0 to N-1 do
    if even(X[i]) = even(X[j])
      then ep:=ep+1
      else op:=op+1
```

Dit algoritme voert N^2 (eigenlijk $N^2 + 2$) assignments uit. Iemand die eerst nadenkt over het probleem observeert wellicht dat

$$e = \left|\{i|0 \le i < N \ \wedge\ \text{even}(X[i])\}\right|$$

$$o = \left|\{i | 0 \leq i < N \ \wedge \ \text{oneven}(X[i])\}\right|$$

veel sneller te berekenen is:

```
e:=0; o:=0;
for i:=0 To N-1 do
  if even(X[i])
    then e:=e+1
    else o:=o+1
```

Terwijl we dan met

```
ep:=e*e+e*o+o*e; op:=o*o
```

dezelfde eindrelatie bewerkstelligen. En dit algoritme voert nog maar N (eigenlijk $N+4$) assignments uit.

We gaan nu de executietijden van deze twee algoritmen bekijken. Stel dat één assignment 1 seconde kost, en dat $N = 30$. Het eerste algoritme doet er dan 900 seconden over, het tweede slechts 30.
Als het eerste 625 uur bezig, dan is het tweede 25 uur onder de pannen en is het eerste 25 dagen bezig dan het tweede 5. Toch? Alhoewel, stel dat het eerste algoritme 625 uur over zijn taak doet (iets meer dan 26 dagen), doet het tweede algoritme het dan in $\sqrt{625} = 25$ uur of in $\sqrt{26} = 5,1$ dag? Of gaan er 25 uren in $5,1$ dag?

5.7 Revanche van de meetkundige reeks

In sterk verhaal 2.1 bezwoer ik u met de hand op mijn hart, dat onderstaande redenering (hier natuurlijk weer net iets anders geformuleerd) correct is.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\dots \\ x & = & \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\dots \quad - \\ \hline 9x & = & 9 \end{array}$$

In het antwoord op die vraag wordt daar zelfs een bewijs voor gegeven. Dan moet het volgende verhaal ook wel goed zijn:

$$\begin{array}{rcr} x & = & 1+2+4+8+\dots \\ 2x & = & 2+4+8+\dots \\ \hline -x & = & 1 \end{array} \quad -$$

en dus is $x = -1$ zodat de conclusie luidt

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

Voor de computer-hackers onder jullie heb ik nog een bonusopmerking. Het binaire getal $11111\dots$ (hexadecimaal FFFF$\dots$) is de representatie voor -1. En hoeveel is $11111\dots$? Welnu, $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$.

Antwoorden

De hoofdstuktitel Goed is fout, is fout is natuurlijk goed. Dit om de verwarring nog even te vergroten. Deze titel is een vrije vertaling van een zogeheten Boolese expressie: waar is onwaar, is onwaar. Nog weer anders geformuleerd: $(\textit{true} = \textit{false}) = \textit{false}$, en dat is dus *true*, ehh waar.

Kwadrateren

Dit is eigenlijk te flauw om los te lopen. *Delen door nul is flauwekul*, zoals de alfa's zeggen. En $x = y$ dus $x - y = 0$.

Differentiëren

Pittige opgave. De fout zit in

$$\frac{d}{dN}(\underbrace{N + N + \ldots + N}_{N}) \neq \underbrace{\frac{d}{dN}N + \frac{d}{dN}N + \ldots + \frac{d}{dN}N}_{N}$$

Differentiëren distribueert wel over optellen, maar er is ook nog zo iets als de kettingregel! Het *aantal* termen is ook nog een functie van N.

Integreren

Voor wie goed heeft opgelet op school is de fout triviaal: uit een onbepaalde integraal komt een verzameling functies. Als $\frac{d}{dx}F = f$ dan geldt

$$\int f\ dx = F + C\ , C \in \mathbb{R}$$

Goed te zien is dit bij een bepaalde integraal waar de constante wegvalt:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = 1\Big]_a^b - \int_a^b x\, d\frac{1}{x} = 1 - 1 + \int_a^b \frac{x}{x^2}dx = \int_a^b \frac{1}{x}dx$$

Overigens dacht u vast (ook zo geleerd, nietwaar) dat

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

Welnu, dat is niet waar. Het moet zijn

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \ln x + C_1 & , x > 0 \\ \ln -x + C_2 & , x < 0 \end{cases}$$

Nu denkt u vast dat dat hetzelfde is, maar dat is dus niet zo, C_1 mag anders zijn dan C_2, zodat de grafiek niet meer symmetrisch rond de y-as is.

Een stompe rechte hoek

Alleen de voorlaatste zin van het bewijs is fout! Dit valt niet zo op omdat de fout eigenlijk in de tekening zit (maar u als goed wiskundige kijkt toch niet naar de plaatjes). Punt B' ligt namelijk aan de andere kant van lijn OD dan het plaatje suggereert. En dan worden verkeerde hoeken vergeleken.

Elke driehoek is gelijkbenig

De laatste zin van het bewijs is fout, maar ook hier wordt u misleid door het plaatje: punt D ligt aan de andere kant van A op AC. En dan worden verkeerde lijnstukken vergeleken.

Een 24-urige werkweek

We weten dat het *aantal slagen* zich verhoudt als $n^2 : n$, en *niet* de executietijden. Als het eerste programma dus 625 uur draait hebben we daar niets aan. Is $N = 25$ en kost een assignment 1 uur, of is $N = 5$ en kost een assignment 1 dag. (Of ligt het nog anders!)

Revanche van de meetkundige reeks

De analogie tussen

$$9\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i$$

en

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i$$

is, zoals u hier prachtig geïllustreerd ziet, groot. Er is echter een (subtiel?) verschil: in de ene reeks is de rede kleiner dan 1 ($\frac{1}{10}$ namelijk) en in de andere groter dan 1 (2 namelijk). Daardoor is de eerste reeks volgens de wiskundige cretologie convergent. De reeks heeft een som, en wel volgens intermezzo 3 op pagina 64, een ter grootte van $\frac{9}{1-1/10} = 10$. De tweede reeks is divergent, in lekentaal: de som is oneindig. En om nu te schrijven

$$\begin{array}{rcr} x & = & 1+\infty \\ 2x & = & \infty \\ \hline -x & = & 1+\infty \end{array} \; - \; -\infty = 1$$

dat moet zelfs voor een leek te ver gaan.
Bij computers gaat het “goed” omdat oneindig daar niet bestaat; 1111111111111111 of zoiets is het grootste getal. Het is wel de reden de het two’s complement zo mooi werkt.

Mathe. Magie

6 Groot, groter, grootst

Grote—en geloof me, ze worden groter dan u denkt—getallen vormen het onderwerp van dit hoofdstuk. En wie kent het niet (van de mensen die deze zin nu lezen dan toch), het bekende verhaal van het schaakbord dat vol met graan gestort moest worden. Exponentieel is de vakterm die hierbij hoort, en om te laten zien dat het nóg erger kan: de Ackermann functie.

6.1 Het graanpakhuis

De serie “exponentiële” problemen moet natuurlijk beginnen met het met graan belegde schaakbord. Een legende vertelt dat een koning zich stierlijk verveelde. Hij schreef daarom een wedstrijd uit in zijn koninkrijk. Degene die het intrigerendste spel zou aanbieden zou vorstelijk beloond worden. Nu is deze legende niets anders dan een gedateerde produktpromotie dus het zal u wel niets verbazen dat het edele schaakspel als winnaar uit de bus kwam.
De koning was zelfs zo onder de indruk, zo wil het verhaal althans, dat de uitvinder van het spel zelf zijn beloning mocht bepalen. Graan wilde hij (in echte sprookjes gaat het tenmiste om dochters of zakken goud) en wel volgens de volgende sleutel: op het eerste hokje van het schaakbord één korrel en op het volgende hokjes steeds het dubbele aantal van het vorige. Dus op het tweede hokje twee korrels, daarna vier, acht, zestien en zo verder tot en met het vierenzestigste hokje. Dit vond de koning geen overdreven eis. Hij gaf zijn hofwiskundige de opdracht uit te rekenen hoeveel zakken dat waren, om de man naar wens te kunnen belonen. Toen de wiskundige echter kwam vertellen dat *zakken* nu niet precies de grootte was waarin de koning moest denken, maar eerder in pakhuizen of zo, schijnt de uitvinder van het schaakbord onthoofd te zijn. (Alleen een Amerikaanse remake van een Franse film heeft tegenwoordig nog een happy end.)

Heeft u enig idee hoeveel graan de uitvinder wenste? Om de vraag wat concreter te maken, hoe lang moet een pakhuis van 100 meter breed (!) en 100 meter hoog (!!) zijn opdat al het graan erin past. U mag er hierbij van uitgaan dat er 10 graankorrels in een kubieke centimeter gaan.

6.2 Kranten vouwen

Er is vast wel eens iemand naar u toegekomen met de mededeling dat u niet in staat bent een vel papier negen keer dubbel te vouwen. Ook u dacht ongetwijfeld slim te zijn toen u met een A1-formaat krantepagina aankwam, maar werd wat onzeker toen de vragensteller begon te glimlachen in plaats van te protesteren. Moedig begon u aan uw poging maar u moest inderdaad constateren dat de achtste vouw al nauwelijks meer zo genoemd kon worden.
Als een krantepagina (ongeveer $\frac{1}{20}$mm dik) acht keer gevouwen wordt houd je een pak over van ruim 1 cm! Nog een keer vouwen levert voor de “binnenbocht” velletjes geen problemen op. Het “buitenbocht” papiertje moet echter een *extra* weg afleggen van πcm! En zoveel rekt papier niet.

Stel dat het u zou lukken om een (groot) vel papier 60 keer “dubbel te vouwen” (bijvoorbeeld door het pak papier steeds in tweeën te knippen en de twee helften op elkaar te leggen), heeft u dan enig idee hoe dik dat pak zal worden?

6.3 Moeras plempen

Er was eens, in een ver en drassig land, een koning. Deze koning, Carolus was trouwens zijn naam, was een rijk man. Niet alleen regeerde hij over een groot land, hij beschikte ook nog over bergen goud. Alle kelders van zijn kasteel—en het was een groot kasteel—puilden uit. Ook kon hij trots zijn op zijn onderdanen. Zo woonde er zelfs, en dat zal de sprookjeslezende lezer nauwelijks verbazen, een wijze tovenaar: Irka. Toch was Carolus niet echt gelukkig. Onder zijn onderdanen zaten namelijk een paar onrustzaaiers. Deze linkse rebellen klaagden over de volkshuisvesting in zijn rijk. Nu was het niet de gewoonte van Carolus om naar oproerkraaiers te luisteren, zeker niet als dat ondankbare tuig met geweld dreigde, maar hij moest toegeven dat er de laatste tijd een tekort aan

woningen was. En dat lag aan dat verdomde moeras dat zeker de helft van zijn rijk onbewoonbaar maakte.
Nu was Carolus een koning die er best wel wat voor over had om zijn onderdanen tevreden te stellen. Hij besloot dus het moeras bewoonbaar te maken. Maar ja, het was een groot moeras. Dus riep hij Irka bij zich, en legde het probleem voor. Irka wist inderdaad meteen raad. Hij had een plantje, een bodembedekker, dat razendsnel groeide en dus binnen de kortste keren het moeras kon overwoekeren.
Dit klonk Carolus niet slecht in zijn oren en hij vroeg Irka het plan wat verder uit te werken. Irka vertelde dat het plantje zich weliswaar elke dag verdubbelde (dus na een dag zijn er twee, na twee dagen vier etc.) maar dat het toch wel een klein plantje was. Hij had uitgerekend dat het nog een heel jaar zou duren voordat het hele moeras dichtgegroeid was als hij morgen het plantje in het moeras zou zetten. En verder was het plantje natuurlijk niet goedkoop.
Nu wisten al zijn onderdanen hoe rijk Carolus was, dus de koning begreep dat het een *duur* plantje was. Maar een *jaar* wachten was nu ook weer niet direct wat hij zich voorgesteld had. Of hij het volk zo lang kon laten wachten, nee, dat leek hem niet. Toen kreeg hij een heldere ingeving.

Kan ik niet twee plantjes kopen, zodat ik maar een half jaar hoef te wachten, betalen kan ik het wel, en een half jaar is nog overbrugbaar. Irka begon te glimlachen. Weet u waarom?

6.4 Ackermann

U heeft nu, als u de opgaven tenminste sequentieel doorwerkt, gezien dat exponentiële functies hard gaan. Maar het kan nog erger. Om dat te illustreren de Ackermann functie:

$$\begin{array}{rcl}
A & \in & I\!N^2 \longrightarrow I\!N \\
A_0(m) & \stackrel{1}{=} & m+1 \\
A_{n+1}(0) & \stackrel{2}{=} & A_n(1) \\
A_{n+1}(m+1) & \stackrel{3}{=} & A_n(A_{n+1}(m))
\end{array}$$

Deze recursieve functie is “goed” gedefinieerd. Observeer hiertoe dat bij een recursieve aanroep van $A_n(m)$ het indexenpaar (n, m), lexicografisch geordend, kleiner wordt. Ter illustratie berekenen we $A_1(1)$:

$$A_1(1) \stackrel{3}{=} A_0(A_1(0)) \stackrel{1}{=} A_1(0) + 1 \stackrel{2}{=} A_0(1) + 1 \stackrel{1}{=} 1{+}1{+}1$$

Deze functie ziet er niet echt alarmerend uit. En de eerste waarden zijn dat ook niet: $A_0(0) = 1$, $A_1(1) = 3$, $A_2(2) = 7$ en $A_3(3) = 2432$. Maar heeft u enig idee hoe groot $A_4(4)$ is? Wees gewaarschuwd!

Antwoorden

Het graanpakhuis

Op het eerste hokje van het schaakbord ligt 1 graankorrel (2^0 dus), op het tweede 2 (2^1 dus) en op het derde, vierde en vijfde respectievelijk 4, 8 en 16 (2^2, 2^3 en 2^4). Op hokje i liggen dus 2^{i-1} graankorrels. In totaal liggen er dus $S(64)$ graankorrels, met

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$$

Kortom, we moeten de som van een (eindige) meetkundige reeks bepalen. Dit standaardprobleem wordt opgelost in intermezzo 3 op pagina 64. We vinden daarmee

$$S(n) = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Het schaakbord ligt dus bedekt met $S(64) = 2^{64} - 1$ graankorrels, dat is om en nabij de $1,8 \cdot 10^{19}$ korrels dus (met 10 korrels per cm^3) $1,8 \cdot 10^{18}$ cm^3. Er gaan 1.000 cm^3 in 1 dm^3 en er gaan 1.000 dm^3 in 1 m^3 dus er gaan $1.000.000$ cm^3 in 1 m^3. Voor de gehele beloning hebben we dus een pakhuis nodig met een opslagcapaciteit van $1,8 \cdot 10^{12}$ m^3. Volgens de opgave was de breedte en de hoogte van het te bouwen pakhuis 100 m dus de lengte moet $1,8 \cdot 10^8$ m ofwel $1,8 \cdot 10^5$ km worden. Dat is ongeveer $4,7$ keer de aarde rond!

Kranten vouwen

Als een vel papier n keer dubbel gevouwen is, is het 2^n lagen dik. Ervan uitgaande dat we een vel hebben van $0,05$ mm dik, hebben we na 60 keer vouwen dus een pak van $0,05 \cdot 2^{60}$ mm dik. Dat is $5,8 \cdot 10^{13}$ m ofwel bijna 400 keer de afstand aarde-zon.

Wordt die stapel dan niet een beetje smal, hoor ik u vragen. Of anders gesteld, als we een stapel willen overhouden met

INTERMEZZO 3

De som van een eindige meetkundige reeks

Gegeven een meetkundige reeks a_i met constante c en rede r: $a_i = cr^i$ voor $i \in \mathbb{N}$. Gevraagd wordt de som van de eerste n termen van deze reeks:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

Dé slimme truc om deze som te bepalen is: vermenigvuldigen met de rede r:

$$rS(n) = r\sum_{i=0}^{n-1} a_i = r\sum_{i=0}^{n-1} cr^i = \sum_{i=1}^{n} cr^i$$

Zodat

$$\begin{aligned} rS(n) - S(n) &= \sum_{i=1}^{n} cr^i - \sum_{i=0}^{n-1} cr^i \\ &= cr^n - cr^0 = c(r^n - 1) \end{aligned}$$

en dus

$$S(n) = c\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

een grondoppervlak van, pak'm beet $4,5$ cm^2, hoe groot moet het oorspronkelijke vel papier dan zijn? Als we na 60 keer vouwen $4,5$ hebben, hebben we na 59 keer vouwen $4,5 \cdot 2$ en na 58 keer vouwen een oppervlak van $4,5 \cdot 2^2$ cm^2. Kortom, de oorspronkelijke grootte is $4,5 \cdot 2^{60}$ cm^2 en dat is $5,2 \cdot 10^8$ km^2. Bekleden we daar een bol mee, dan heeft die een straal van ($A = 4\pi r^2$) $r = 6400$ km. Kortom, een vel papier met eenzelfde oppervlakte als de aarde, en dat valt dus best wel mee. (Ra ra ra, waar komt die $4,5$ cm^2 vandaan).

Voor wie dit het zoveelste bewijs is dat de aarde klein is, te klein voor de 5 miljard mensen die er wonen, neme het volgende eens in beschouwing. Als we alle mensen een leefgebied zouden geven van één vierkante meter—'s nachts delen ze hun 1 bij 1 hok met dat van de buurman, dan hebben ze beide een half bij twee meter—dan hebben we dus 5 miljard vierkante meter nodig om ze allemaal te huisvesten. En dat is een veld van ($\sqrt{5 \cdot 10^9} = 70711$) 71 km bij 71 km. Kortom, een gebied zo groot als de Randstad volstaat voor de *gehele* wereldbevolking.

We keren nog even terug naar de exponentiële schaal. Hij gaat hard, maar is best handig. Met beschaafde getallen meet je de kleinste en de grootste maten uit onze wereld:

lengte-item	grootte	vouwen
Dikte vel papier	$0,05$ mm	0
Dikte lucifer	2 mm	5
Hoogte pak melk	20 cm	12
Hoogte deur	2 m	15
Hoogte Eiffeltoren	310 m	23
Hoogte Mount Everest	$7,8$ km	27
Straal aarde	$6,4$ Mm	37
Afstand aarde-maan	384 Mm	43
Afstand aarde-zon	150 Gm	51
Afstand aarde-α Centauri A	$4,2$ lj	69
Afstand aarde-Rigel A	$1,7$ klj	78
Diameter heelal	10 Glj	100

Ter verduidelijking zij opgemerkt dat de voorvoegsels M en G voor mega (10^6) en giga (10^9) staan en dat “lj” voor de eenheid lichtjaar ($9,461 \cdot 10^{15}$ m) staat. De verste sterren staan op een afstand 10^9 lj van de aarde af dus, fijnslijpers, mij leek 10^{10} lj een aardige indicatie van de grootte van het heelal.
Het moge duidelijk zijn dat de atoomstraal van een waterstofatoom op deze schaal -20 scoort. Helaas weet ik niet hoe dik μ-bosomen zijn, want ik zoek natuurlijk nog iets wat -100 groot is.

Moeras plempen

Plant hij nu een plantje, dan heeft Carolus er morgen twee. De tijdswinst is dus niet een half jaar, maar maar één dag. Of dat die extra zakken goud waard is... Als er trouwens meer monarchen zijn met gelijksoortige problemen, kun je buitensporig rijk worden in die buurt.

Ackermann

We weten dat

$$A_0(m) = m + 1$$

Het is dan eenvoudig om met inductie te bewijzen dat

$$A_1(m) = m + 2$$

en dat gaat ook nog niet zo hard. We gaan een stap verder (bewijzen met inductie)

$$A_2(m) = 2m + 3$$

nog niet echt om van te schrikken. Wederom met inductie vinden we

$$A_3(m) = 2^{m+3} - 3$$

wat plots exponentieel is. En daar hebben we al niet zulke goede ervaringen mee (zie eventueel kranten vouwen). En, wat erger is, we moeten nog een stap. Helaas is dat met conventionele wiskundige operatoren niet eenvoudig. We zullen het dan ook niet doen. Maar dat hoeft ook niet om tot een redelijke uitdrukking voor $A_4(4)$ te komen.

Immers $A_4(0) = A_3(1) = 2^{1+3} - 3 = 13$, waarbij de eerste stap uit de definitie volgt, de tweede uit de "afgeleide" relatie voor $A_3(m)$ en de derde gewoon uit de rekenkunde. En zo kunnen we verder. Immers,

$$A_4(1) = A_3(A_4(0)) = A_3(13) = 2^{13+3} - 3 = 65533$$

en, verder...

$$A_4(2) = A_3(A_4(1)) = A_3(65533) = 2^{65533+3} - 3 \approx 10^{19728}$$

Dit begint al lastig te worden. Om $A_4(2)$ op te schrijven heeft u dus al 19.728 cijfers nodig. Oké, dat is nog slechts één krantepagina vol. Maar het wordt erger, en onbeschrijfbaar:

$$A_4(3) = A_3(A_4(2)) = A_3(2^{65536} - 3) = 2^{2^{65536}} - 3$$

Voor dit getal heeft u al ${}^{10}\log A_4(3) \approx^{10} \log 2^{10^{19728}} = 10^{19728} \cdot {}^{10}\log 2 \approx 10^{19728}$ cijfers nodig. Waren er 19.728

cijfers in het vorige geval nodig, nu zijn het er dus al 10^{19728}. En dat is $5 \cdot 10^{19723}$ krantepagina's (van 20.000 cijfers) vol, als u denkt daarmee een aardige schatting te kunnen maken. Aangezien er zo'n 20.000 pagina's (van $\frac{1}{20}$ mm dik) in een meter gaan is die stapel kranten zo'n $25 \cdot 10^{19718}$ meter hoog. In de vorige opgave zagen we al dat het heelal ruwweg 10^{26} m groot is, dus die stapel is even hoog als 10^{19692} heelals op elkaar...
Maar goed, we moesten $A_4(4)$ bepalen

$$A_4(4) = A_3(A_4(3)) = A_3(2^{2^{65536}} - 3) = 2^{2^{2^{65536}}} - 3$$

waarbij elke poging om een indruk van de grootte te krijgen gedoemd is te mislukken. We pogen dus maar niets.
We zien trouwens in deze laatste formule dat de "twee-tot-de-macht" steeds herhaald wordt, en wel m keer:

$$A_4(4) = 2^{2^{2^{2^{13+3}}}} - 3$$

Dit is geen speciale eigenschap van A_4. In het algemeen geldt namelijk dat

$$A_n(m) = (2 \otimes_n (m + 3)) - 3$$

Waarbij

n	0	1	2	3	$\ldots$
$\otimes_n$	σ	$+$	$\times$	$\uparrow$	$\ldots$

Hierin is $\uparrow$ de machtsverheffing en σ de successorfunctie, hier echter binair gebruikt: $a \; \sigma \; b \; := \; b + 1$.

7 Informatica

Mathe.
Magie

Ik kan mijn ware aard toch niet verloochenen. Informaticus in hart en nieren. Dat betekent algoritmen, maar verzin daar maar eens leuke verhaaltjes bij. Een poging (voor geïnteresseerden)...

7.1 Hoofdrekenen

De taak van de informaticus bestaat uit het ontwerpen van algoritmen. En wat is er dan idealer dan het ontwerpen van een algoritme (verder “truc” genoemd) waardoor je, voor de nietsvermoedende buitenwacht althans, nóg slimmer lijkt. Bijvoorbeeld omdat je binnen een fractie van een seconde weet dat $81 \times 89 = 7209$.
Zij die hebben opgelet op de middelbare school zeggen: “Ja, dat kan ik ook wel uit mijn hoofd: dat is een merkwaardig produkt $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$”. En inderdaad, voor $a = 85$ en $b = 4$ hoef je alleen nog maar $85^2 - 4^2$ uit te rekenen, en dat is 7225 (oh ja?) minus 16 (oké) ofwel (ehh) 7209. Maar ik weet dus niet hoeveel 85^2 is (uit mijn hoofd, zonder mijn truc).
Mijn truc. Hij werkt niet vaak, maar wel redelijk snel. Moet je twee getallen met gelijke tientallen en complementaire eenheden met elkaar vermenigvuldigen (11×19, 12×18, 13×17, $\ldots$, 98×92, 99×91), neem dan het produkt van het tiental en de opvolger van dat tiental gevolgd door het produkt van de twee eenheden.

Dus bij 83×87 werkt de truc: de tientallen zijn gelijk (8 en 8), en de eenheden zijn complementair ($3 + 7 = 10$). De uitkomst is $8 \times (8+1) = 72$ gevolgd door $3 \times 7 = 21$ dus 7221.
De belangrijkste taak van de informaticus bestaat echter niet uit het presenteren van algoritmen, maar uit het bewijzen van hun correctheid. Deze keer laat ik dat echter aan u over.

7.2 Kladpapierrekenen

Sommige sommen zijn te moeilijk om uit het hoofd uit te rekenen. Of we zijn er gewoon te lui voor. Dan nemen we onze toevlucht tot een calculator... of een kladblaadje. Maar zowel dat rekentuig als de kladpapierrekenaar heeft een *methode* nodig om tot een antwoord te komen.
Voor het vermenigvuldigen van twee getallen gebruikt u waarschijnlijk de lagere-school methode: het onder elkaar zetten en cijfer voor cijfer vermenigvuldigen:

$$\begin{array}{r l} 97 & \\ 23 & \times \\ \hline 291 & \\ 1940 & + \\ \hline 2231 & \end{array}$$

Maar als u waanzinnig goed bent in het verdubbelen en halveren van getallen—iets waar de doorsnee digitale rekenautomaat nogal eens last van heeft—dan heb ik nog een aardige methode voor u.
Maak een tabel van twee kolommen, zet rechtsboven de ene factor en linksboven de andere. Vul de tabel nu door steeds rechts te verdubbelen en links te halveren (oneven getallen afkappen). Ga zo door tot links een 1 staat.

97	23	óf	23	97
48	46		11	194
24	92		5	388
12	184		2	776
6	368		1	1552
3	736			
1	1472			

Tel dan die rechter getallen bij elkaar waarvan het bijbehorende linker getal oneven is:

$$\begin{array}{rrl}
97 & 23 & \\
48 & \cancel{46} & \\
24 & \cancel{92} & \\
12 & \cancel{184} & \\
6 & \cancel{368} & \\
3 & 736 & \\
1 & 1472 & \\
\cline{2-2}
 & 2231 & +
\end{array}
\qquad \text{óf} \qquad
\begin{array}{rrl}
23 & 97 & \\
11 & 194 & \\
5 & 388 & \\
2 & \cancel{776} & \\
1 & 1552 & \\
\cline{2-2}
 & 2231 & +
\end{array}$$

Het antwoord ziet er wel goed uit—in dit geval—maar zou deze truc altijd werken? Kortom, wederom, waarom is dit algoritme correct?

7.3 Worteltrekken

Hoofdrekenen is een vervelende bezigheid, vooral bij “grote” getallen en/of vervelende operaties. Ik denk dat ik vrij objectief kan stellen dat de opgaven $3 + 2$, $23 - 18$, 45×71 en $5371/189$ voor iedereen in opklimmende moeilijkheidsgraad staan (wat zich uit in langere (hoofd)rekentijden). En als het te gortig wordt nemen we er een pen en papiertje bij.
Op een paar rekenwonders na kan niemand $\sqrt{58081}$ uit zijn hoofd uitrekenen. (En toch komt er een “mooi” getal uit: 241.) En ik maak me zelfs sterk dat als ik de wortel uit 58018 vraag (merk op: laatste twee cijfers omgedraaid) u er zelfs met pen en papier geen raad mee weet, behalve dan misschien met *trial and error*, maar dat is dus geen *methode*.

Dus: bereken $\sqrt{58018}$ op twee decimalen nauwkeurig. Uit het hoofd, of met pen en papier, maar zonder elektro- en/of mechanische hulpmiddelen.

7.4 Nog n nachtjes slapen

Hoeveel nachtjes is het nog slapen? Als informatica-ouder heb je het maar zwaar. Wij kunnen immers op de dag nauwkeurig bepalen hoeveel dagen er op, pak ’m beet, 15 oktober 1582 verlopen waren sinds de geboorte van Jezus Christus. Niet dan?

7.5 GGD-en

Als we de breuk $\frac{1176}{6860}$ optimaal willen vereenvoudigen moeten we teller en noemer delen door het grootst mogelijke getal. In de wiskunde staat dit getal bekend als de *grootste gemene deler* van die twee getallen. In formule $1176 \operatorname{ggd} 6860 = 196$, dus $\frac{1176}{6860} = \frac{1176/196}{6860/196} = \frac{6}{35}$. En het is duidelijk dat dat inderdaad niet meer vereenvoudigd kan worden.
Hoe vinden we nu die grootste gemene deler? De lagereschooltruc bestaat uit het bepalen van de grootste verzameling (eigenlijk 'bag' of 'multiset') priemdelers die omvat wordt door de priemdelers van beide getallen. Dus eerst moeten we 1176 en 6860 ontbinden in priemfactoren:

$$\begin{array}{c|l} 1176 & 2 \\ 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} 6860 & 2 \\ 3430 & 2 \\ 1715 & 5 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Dus $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ en $6860 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3$ en dus zijn de gemeenschappelijke delers 2, 2, 7 en 7 zodat de ggd $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 = 196$ is.
Maar ene Euclides heeft een alleraardigste truc (ehh, algoritme) verzonnen. Vervang steeds het grootste getal van de twee door hun verschil, en ga zo door tot de twee getallen gelijk zijn. En dat is dan meteen de ggd.

$$\begin{array}{c|c} 1176 & 6860 \\ 1176 & 4508 \\ 1176 & 3332 \\ 1176 & 2156 \\ 1176 & 980 \\ 196 & 980 \\ 196 & 784 \\ 196 & 588 \\ 196 & 392 \\ 196 & 196 \end{array}$$

En u voelt het vast al wel weer aankomen. Wat steekt hier achter, of waarom had Euclides het bij het rechte eind?

7.6 Fibonacci

Komt het rijtje 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657 en 46368 u wellicht bekend voor? Het zijn de eerste 25 Fibonacci-getallen. Voor wie ze niet kent (elk getal—behalve de eerste twee—is de som van zijn twee voorgangers):

$$\begin{array}{rcl} F & \in & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_{n+2} & = & F_{n+1} + F_n \end{array}$$

U zou ze kunnen uitrekenen met behulp van bovenstaande functie. Dat kost dan wel ongeveer $1,45 \cdot 1,62^n$ functie-aanroepen om het n-de Fibonacci-getal te bepalen (hoeveel *precies?*). Merk op dat dat een *exponentiële* rekentijd is. Op deze manier kost F_{100} ongeveer 10^{21} aanroepen. Heeft u een PC die op 10 gigaflops draait? Dan doet u er toch nog ruim 3 duizend eeuw over.
Maar het kan gelukkig ook sneller:

$$\begin{array}{rcl} G & \in & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ G_0 & = & (0,1) \\ G_{n+1} & = & (b, a+b) \ \underline{\text{where}} \ (a,b) = G_n \end{array}$$

Er geldt dan

$$G_n = (F_n, F_{n+1})$$

Of, voor wie liever “gewone” programma’s heeft:

$|[$ con N : int $\{ \ N \geq 0 \ \}$
$|$ $|[$ var n, a, b : int
$\quad |$ $n, a, b := 0, 0, 1$
$\quad\quad \{$ invariant: $a = F_n \ \wedge \ b = F_{n+1} \ \wedge \ 0 \leq n \leq N \ \}$
$\quad ;$ $\underline{\text{do}}\, n \neq N \rightarrow a, b, n := b, a+b, n+1$ $\underline{\text{od}}$
$\quad\quad \{ \ n = N \ \wedge \ a = F_n$ dus $a = F_N \ \}$
$\quad]|$
$]|$

Nu kost het berekenen van het n-de Fibonacci-getal nog maar $n+1$ functie aanroepen. Op mijn zielige 1 kiloflops PC is dat nog maar 100 milliseconde voor F_{100}. Overigens slaat het nergens op om over fl(oating)p(oint)o(perations per)s(econd) te praten want de Fibonacci-getallen vormen een prachtige reeks *natuurlijke getallen*.

Maar genoeg hints. Het moet nóg sneller! Een integer algoritme, in logaritmische tijd. Maar nu verraad ik het algoritme niet, dat mag u eens zelf verzinnen.

Mathe- Magie Antwoorden

Hoofdrekenen

De twee te vermenigvuldigen getallen kunnen we schrijven als $\boxed{a}\,\boxed{b}$ en $\boxed{a}\,\boxed{c}$ met a, b en c cijfers $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ en $b+c=10$. Volgens de truc moet hun produkt dan $\boxed{a(a+1)}\,\boxed{bc}$ zijn. We moeten dus bewijzen dat het produkt van $10a+b$ en $10a+c$ gelijk is aan $100a(a+1)+bc$. Welnu, dat is eenvoudig:

$$
\begin{array}{ll}
 & (10a+b)\times(10a+c) \\
= & \quad \{ \text{ uitvermenigvuldigen } \} \\
 & 100a^2+10ac+10ab+bc \\
= & \quad \{ \ c=10-b \ \} \\
 & 100a^2+100a-10ab+10ab+bc \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & 100a(a+1)+bc
\end{array}
$$

Kladpapierrekenen

Het in de opgave gepresenteerde algoritme dat twee getallen A en B moet vermenigvuldigen is veel ingewikkelder dan dat uit de vorige opgave. Nu is er namelijk sprake van een repetitie: “Ga zo door tot er links een 1 staat”. En wil men de correctheid aantonen van een repetitie, dan moet men een zogeheten invariant formuleren. In ons geval luidt die:

> *Voor elke regel uit de tabel geldt dat het produkt van het linker en het rechter getal plus die rechter getallen die hoger in de tabel staan waarvoor bovendien geldt dat het linker getal oneven is, gelijk is aan het te berekenen produkt* $A\times B$.

Voor de eerste regel uit de tabel klopt de invariant. Immers, we vullen de twee factoren A en B in die samen al het te berekenen produkt $A\times B$ vormen. Gelukkig staan er geen regels boven zodat er niets bij opgeteld hoeft te worden.

Nu gaan we regels aan de tabel toevoegen. Als het linker getal even is, dan kunnen we—zonder de invariant te verstoren—een regel aan de tabel toevoegen, zolang het produkt van de twee getallen op die nieuwe regel maar gelijk is aan het produkt van de twee getallen op de huidige regel. Als de huidige regel dus 100 en 60 bevat, mogen we de tabel uitbreiden met bijvoorbeeld 100 en 60 (wat niet echt opschiet), 1000 en 6 (wat ons zelfs van de wal in de sloot helpt, daar het linker getal naar 1 moet), of 10 en 600.
Nu schiet dat laatste (delen door een groot getal) lekker op, en is ook best toelaatbaar, maar in het algemeen geeft delen-door-een-groot-getal breuken, en daar houden we niet van. Nu hadden we verondersteld dat het linker getal even was, dus delen door 2 gaat prachtig: 50 en 120 heeft onze voorkeur, bij het gegeven voorbeeld.
Wat nu als het linker getal oneven is? Dan kunnen we niet zomaar een nieuwe regel toevoegen waarvan het produkt gelijk is aan het produkt van de twee getallen van de vorige regel. Immers, het huidige rechter getal heeft een oneven linker buurman en het staat hoger in de tabel dan de nieuwe regel. En dan moet hij opgeteld worden bij het produkt van die nieuwe regel. Staat er bijvoorbeeld 21 en 40 (met een produkt van 840), dan moet een nieuwe toe te voegen regel een produkt hebben van $840 - 40 = 800$ daar we anders de invariant verstoren. Kortom, we mogen een regel toevoegen waarvan de linker buur één lager is en de rechter gelijk blijft: 20 en 40!
Aangezien een oneven getal minus 1 altijd even is, kunnen we meteen de oude truc toepassen: delen door twee. We voegen dan dus niet eerst 20 en 40 en dan 10 en 80 toe, maar voegen meteen (alleen) 10 en 80 toe.
Dit proces van regels toevoegen verstoort de invariant niet. Bovendien wordt het linker getal steeds kleiner, en eens zal het dus 1 worden (oneven!). Het gevraagde produkt is dan—volgens de invariant—precies de som van die rechter getallen waarvan de linker oneven is.

Een andere manier om er tegenaan te kijken is de “binaire lagere-schoolmethode”. Schrijf de twee factoren binair uit en doe gewoon de lagere-school-onder-elkaar-schrijf-truc. Het voorbeeld uit de "opgave" werkt uit tot:

$$
\begin{array}{rcll}
1100001_2 & = & 97_{10} = A & \\
10111_2 & = & 23_{10} = B & \\
\hline
 & & & \times \\
1100001_2 & = & 97_{10} & \\
11000010_2 & = & 194_{10} & \\
110000100_2 & = & 388_{10} & \\
0000000000_2 & = & 0_{10} & \\
11000010000_2 & = & 1552_{10} & \\
\hline
 & & & + \\
100010110111_2 & = & 2231_{10} = A \cdot B &
\end{array}
$$

In PASCAL zou het programma (zonder de kortsluittruc) zo luiden:

```
function Maal(A,B:integer):integer;
  {A>=0 en B>=0}
  var x,y,r:integer;
  begin {Maal}
    x:=A; y:=B; r:=0;
    {invariant: r+xy=AB en y>=0}
    while y<>0 do
      if y mod 2 = 0
         then begin x:=2*x; y:=y div 2 end
        else begin r:=r+x; y:=y-1 end;
    {y=0 en r+xy=AB dus r=AB}
    Maal:=r
  end;  {Maal}
```

De wellicht onbekende operator $a \bmod b$ geeft de rest na deling van a door b. Hij wordt uitgelegd in intermezzo 5 op pagina 83.

Worteltrekken

De techniek uit deze opgave is helaas in de loop der tijd verloren gegaan. Veertigplussers die goed hebben opgelet in de laatste klassen van de lagere school zouden hem nog moeten kennen. Zoniet, dan kunnen ze nu even hun geheugen opfrissen.

Worteltrekken op een kladblaadje heeft wel wat weg van staartdelen. Halen we bij staartdelen echter de hele tijd maar één nieuw cijfer aan, bij worteltrekken halen we de hele tijd

INTERMEZZO 4

Logaritmisch machtsverheffen

Een logaritmisch algoritme ter “verheffing van machten” verschilt niet zoveel van het vermenigvuldig algoritme van opgave 7.2:

$$
\begin{array}{l}
|[\ \mathrm{con}\ A, B : \text{int}\ \{\ A \geq 0\ \wedge\ B \geq 0\ \}\\
|\quad |[\ \mathrm{var}\ x, y, r : \text{int}\\
\qquad |\ \ x, y, r := A, B, 1\\
\qquad\quad \{\ \text{invariant: } r \cdot x^y = A^B\ \wedge\ y \geq 0\ \}\\
\qquad ;\ \ \underline{\text{do}}\, y \neq 0 \rightarrow\\
\qquad\qquad \underline{\text{if}}\ \ y \bmod 2 = 0 \rightarrow x, y := x \cdot x, y\ \mathrm{div}\ 2\\
\qquad\qquad [\!]\ \ y \bmod 2 = 1 \rightarrow y, r := y - 1, r \cdot x\\
\qquad\qquad \underline{\text{fi}}\\
\qquad\quad \underline{\text{od}}\\
\qquad\quad \{\ y = 0\ \wedge\ r \cdot x^y = A^B \text{ dus } r = A^B\ \}\\
\qquad]|\\
]|
\end{array}
$$

Voor de $\bmod$ operator zie intermezzo 5 op pagina 83.

een paar aan. Daarom beginnen we bij worteltrekken met het indelen in paren; we plaatsen cijfers in groepjes van twee, te beginnen op de decimale komma:

$$\overline{\ 5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ \ldots\ }$$

Merk op dat we links (zoals in dit voorbeeld) een los cijfer kunnen overhouden, en dat we rechts zoveel paren nullen mogen toevoegen als we nodig hebben voor de gewenste nauwkeurigheid. De opgave vroeg om twee decimalen dus moeten we er drie uitrekenen om verantwoord te kunnen afronden.

De ruimte boven de paren gebruiken we om, net als bij het staartdelen, de cijfers van de uitkomst, straks bij het worteltrekken, één voor één op te schrijven.

Om het worteltrekken te initialiseren, zoeken we het grootste *cijfer* dat gekwadrateerd ten hoogste het eerste paar is. In ons voorbeeld is dat 2 daar $2^2 \leq 5 < 3^2$. We schrijven dan

$$\begin{array}{rl}
 & 2 \\
 & \overline{5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ 00} \\
2\times 2= & \underline{4}\ - \\
 & 1
\end{array}$$

De 2 boven de 5 is het eerste cijfer van onze uitkomst. We vinden hem ook links terug in $2 \times 2 = 4$. Deze uitkomst trekken we van de 5 af en we houden 1 over, zoals geïllustreerd. Hoe gaan we nu verder? Om te beginnen worden de twee factoren uit het produkt samen opgeteld en het volgende paar wordt aangehaald:

$$\begin{array}{rl}
 & 2 \\
 & \overline{5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ 00} \\
2\times 2= & \underline{4}\ - \\
\underline{2}+ & 1\ 80 \\
4\,?\times ?= &
\end{array}$$

We zoeken nu een *cijfer* x zó dat $(40 + x) \times x \leq 180 < (40 + (x + 1)) \times (x + 1)$. Het blijkt dat 4 voldoet. Immers, $44 \times 4 = 176 \leq 180 < 225 = 45 \times 5$. Dus vullen we drie keer de 4 in, rekenen het produkt uit, en trekken dit van de 180 af:

$$\begin{array}{rl}
 & 2\quad 4 \\
 & \overline{5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ 00} \\
2\times 2= & \underline{4}\ - \\
\underline{2}+ & 1\ 80 \\
44\times 4= & \underline{1\ 76}\ - \\
 & \quad\ \ 4
\end{array}$$

We gaan weer verder met het optellen van de factoren, en het aanhalen van het volgende paar:

$$\begin{array}{rl}
 & 2\quad 4 \\
 & \overline{5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ 00} \\
2\times 2= & \underline{4}\ - \\
\underline{2}+ & 1\ 80 \\
44\times 4= & \underline{1\ 76}\ - \\
\underline{4}+ & \quad\ \ 4\ 18 \\
48\,?\times ?= &
\end{array}$$

Nu moeten we een 0 invullen (vergeet niet de decimale komma over te nemen in het antwoord) en de rest van de cyclus afwerken:

$$
\begin{array}{ll}
 & 2\ \ 4\ \ 0, \\ \hline
 & 5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ 00 \\
2\times 2 = & 4\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ 2\ }+ & 1\ 80 \\
44 \times 4 = & 1\ 76\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ 4\ }+ & 4\ 18 \\
480 \times 0 = & 0\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ \ 0\ }+ & 4\ 18\ 00 \\
480\,?\times ? = &
\end{array}
$$

Langzamerhand hebben we nog een kladblaadje nodig om de in te vullen cijfers te bepalen. Nu is dat een 8, daarna een 6 en dan halen we het laatste nullenpaar aan. Een 9 completeert de “staartworteltrekking”:

$$
\begin{array}{ll}
 & 2\ \ 4\ \ 0,\ \ 8\ \ 6\ \ 9 \\ \hline
 & 5\ 80\ 18,\ 00\ 00\ 00 \\
2\times 2 = & 4\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ 2\ }+ & 1\ 80 \\
44 \times 4 = & 1\ 76\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ 4\ }+ & 4\ 18 \\
480 \times 0 = & 0\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ \ 0\ }+ & 4\ 18\ 00 \\
4808 \times 8 = & 3\ 84\ 64\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ \ \ 8\ }+ & 33\ 36\ 00 \\
48166 \times 6 = & 28\ 89\ 96\ - \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ \ \ \ 6\ }+ & 4\ 46\ 04\ 00 \\
481729 \times 9 = & 4\ 33\ 55\ 61\ - \\ \cline{2-2}
 & 12\ 48\ 39
\end{array}
$$

Deze berekening leidt dus tot de conclusie dat $\sqrt{58018} \approx 240,87$. En mocht u meer cijfers willen dan kunt u nog een tijdje doorgaan (of de zakjapanner raadplegen: $240,8692591427\ldots$).

Nog n nachtjes slapen

Laten we eerst even wat feiten op een rijtje zetten. Christus werd natuurlijk geboren op een zondag. Na dat heuglijke feit is onze jaartelling begonnen: de dag erna, maandag 1 januari van het jaar 1, hebben we dus 1–1–1 gedoopt. Nu is dat niet helemaal zo, want onze kalender, de gregoriaanse kalender, is pas sinds 15 oktober 1582 zo als hij nu is, maar dat mag de pret niet drukken.

Het globale idee zal duidelijk zijn. De datum d–m–j is om de nabij de $d - 1 + s(m) + 365j$ dagen na de geboorte van Christus. Waarbij we $d - 1$ doen om 1–1–1 op dag nul te laten vallen en de tabel s gegeven wordt door

Maand	m	dagen	$s(m)$
jan	1	31	0
feb	2	28	31
mrt	3	31	59
apr	4	30	90
mei	5	31	120
jun	6	30	151
jul	7	31	181
aug	8	31	212
sep	9	30	243
okt	10	31	273
nov	11	30	304
dec	12	31	334
			365

De ellende is dat de aarde er geen zin in heeft om in een geheel aantal omwentelingen precies één keer rond de zon te gaan. Om de vier jaar is er een schrikkeljaar, behalve op de eeuwjaren tenzij deze deelbaar zijn door 400 (tja, ik heb het ook niet verzonnen). En tot overmaat van ramp is de schrikkeldag ook nog midden in het jaar. Dat maakt het er zeker niet makkelijker op.
Dus laten we daar eerst eens wat aan doen: we maken januari en februari de maanden 13 en 14 van het vorige jaar! Dan moeten we wel even onze tabel herzien.

Maand	m	dagen	$s(m)$
mrt	3	31	0
apr	4	30	31
mei	5	31	61
jun	6	30	92
jul	7	31	122
aug	8	31	153
sep	9	30	184
okt	10	31	214
nov	11	30	245
dec	12	31	275
jan	13	31	306
feb	14	28	337
			365

Onze formule wordt dan (als $m < 3$ dan $m := m + 12$; $j := j - 1$) dus $d - 1 + s(m) - 306 + 365j + j \text{ div } 4 - j \text{ div } 100 + j \text{ div } 400$. De 306 correctie is wederom nodig om 1–1–1, wat nu dus dag 1–13–0 wordt op dag 0 te krijgen. Die div dingen ($a \text{ div } b$ geeft het quotiënt a/b zonder de rest, zie intermezzo 5 op pagina 83) corrigeren nu voor de schrikkeldagen. Er is om de vier jaar een schrikkeljaar dus in 1933 hebben we $1933/4 = 483,25$ ofwel 483 schrikkeldagen gehad. Dus zijn er niet 365×1933 dagen voorbij maar $365 \times 1933 + 483$. Met dien verstande dat elk eeuwjaar geen schrikkeljaar is (vandaar die $-j \text{ div } 100$) behalve als het een vierhonderdvoud is ($+j \text{ div } 400$). Kortom, er zijn $365 \times 1933 + 483 - 19 + 4$ dagen voorbij.

Ten slotte hebben we nog een truc. Merk op dat de maandentabel redelijk regelmatig is: 30–31–30–31–31 is een terugkerend patroon. Dit is een niet al te wild schommelende reeks, ter lengte 5 en met som 153 en “daarom” is $s(m) = (153m + 3) \text{ div } 5 - 92$. Die $+3$ en -92 corrigeren weer voor de nulstand.

```
if m<3 then begin m:=m+12; j:=j-1 end;
n:=d-1 + (153*m+3) div 5-92-306 + 365*j
     + j div 4 - j div 100 + j div 400
```

INTERMEZZO 5
Integer deling

Naast de “gewone” deling, aangegeven met een deelstreep ($20/8$ of $\frac{20}{8}$ voor 20 gedeeld door 8), kent de wiskunde (informatica?) ook de integer deling. Deze wordt genoteerd met het symbool div en geeft het quotiënt zonder rest:

$$20 \ \mathrm{div} \ 8 = 2$$

Immers $20/8 = 2,5$ ofwel 20 gedeeld door 8 is 2 rest 4. Voor deze rest gebruikt de wiskunde de operator mod:

$$20 \ \mathrm{mod} \ 8 = 4$$

Er geldt dan dus $8 \times 2 + 4 = 20$. In het algemeen geldt voor het quotiënt $a \ \mathrm{div} \ q$ en de rest $a \ \mathrm{mod} \ q$:

$$a = q \times (a \ \mathrm{div} \ q) + a \ \mathrm{mod} \ q \ \wedge \ 0 \leq a \ \mathrm{mod} \ q < |q|$$

Merk op dat de uitdrukking ‘n is even’ geformaliseerd kan worden tot

$$n \ \mathrm{mod} \ 2 = 0$$

En inderdaad 1–1–1 komt uit op dag $n = 0$. Voor 15–10–1582 vinden we $n = 577735$. En dus zijn er 577735 dagen verstreken sinds de geboorte van Christus. Bonus: met behulp van $n \ \mathrm{mod} \ 7$ (voor mod zie intermezzo 5 op pagina 83) vinden we het weekdagnummer: $577735 \ \mathrm{mod} \ 7 = 4$ ofwel 15–10–1582 viel, zoals uit onderstaande tabel volgt, op een vrijdag!

maandag	0
dinsdag	1
woensdag	2
donderdag	3
vrijdag	4
zaterdag	5
zondag	6

GGD-en

De grootste gemene deler van 1176 en 6860 mag dan lastig uit te rekenen zijn, de ggd van 25 en 25 kost heel wat minder hoofdbrekers. Immers,

$$a \text{ ggd } a = a$$

Maar ja, een probleem los je niet op door *alleen* de eenvoudige gevallen te analyseren. Dus nu het geval a ggd b met $a \neq b$. Hiervoor hebben we de volgende observatie. Gegeven twee natuurlijke getallen a en b. Stel dat d een deler is van a én van b. Dan is d ook een deler van $a + b$, $a - b$ en $b - a$, om maar een paar expressies te noemen.
Immers, als d een deler van a is, dan bestaat er een $a' \in I\!N$ zodanig $a = a'd$. Analoog vinden we $b = b'd$ voor een $b' \in I\!N$. Dan geldt dus $a - b = a'd - b'd = (a' - b')d$ en dat is natuurlijk deelbaar door d. Hieruit volgt dat *elke* deler van a en b ook een deler is van $a - b$.
Via een analoge redenering vinden we dat elke deler van b en $a - b$ ook een deler van a is. Dus de verzameling gemene delers van a en b is gelijk aan de verzameling gemene delers van b en $a - b$. En dus is de *grootste* gemene deler van a en b dezelfde als die van b en $a - b$. In formule a ggd $b = (a - b)$ ggd b.
Nu houden we niet van negatieve getallen (voor informatici: we moeten eindiging garanderen) dus:

$$a \text{ ggd } b = (a - b) \text{ ggd } b, \; a > b$$

Natuurlijk is a ggd $b = b$ ggd a dus het geval $a < b$ lossen we op met $a \text{ ggd } b \overset{sym}{=} b \text{ ggd } a \overset{oude}{=} (b - a) \text{ ggd } a \overset{sym}{=} a \text{ ggd } (b - a)$. Samengevat vinden we inderdaad het algoritme van Euclides:

$$\begin{aligned} a \text{ ggd } b &= a, \; a = b \\ a \text{ ggd } b &= (a - b) \text{ ggd } b, \; a > b \\ a \text{ ggd } b &= a \text{ ggd } (b - a), \; a < b \end{aligned}$$

Als je nu echt last van turbo-trekjes hebt, kun je het herhaald aftrekken kortsluiten met de mod-operator (zie intermezzo 5 op pagina 83), die de rest na deling oplevert:

INTERMEZZO 6

Het kleinste gemene veelvoud

Het kleinste gemene veelvoud (kgv) van twee natuurlijke getallen a en b is het kleinste getal dat zowel a als b als deler heeft. Zo is $30 \text{ kgv } 15 = 30$ en $30 \text{ kgv } 20 = 60$.

De lagere-schooltruc om het kleinste gemene veelvoud uit te rekenen bestaat uit het bepalen van de kleinste verzameling (eigenlijk 'bag' of 'multiset') priemdelers die de priemdelers van beide getallen omvat. Zo zijn de priemdelers van 108 de getallen 2, 2, 3, 3 en 3, we schrijven $108 = 2^2 \cdot 3^3$, evenzo schrijven we $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Dus $108 \text{ kgv } 90 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$.

Zelf vind ik het handiger het kleinste gemene veelvoud uit te rekenen met behulp van de grootste gemene deler (ggd). Er geldt namelijk $a \text{ kgv } b = \frac{ab}{a \text{ ggd } b}$. Als je de ggd berekent door de gemeenschappelijke priemdelers te zoeken, schiet je hier niet veel mee op. Maar we kunnen natuurlijk ook het algoritme van Euclides gebruiken. Om terug te komen op ons vorige voorbeeld $108 \text{ ggd } 90 = 2 \cdot 3^2 = 18$, en dus kunnen we $108 \text{ kgv } 90$ berekenen: $\frac{108 \cdot 90}{18} = \frac{9720}{18} = 540$.

$$
\begin{array}{l}
|[\ \mathrm{con}\ A, B : \mathrm{int}\ \{\ A \geq B > 0\ \} \\
|\quad |[\ \mathrm{var}\ a, b : \mathrm{int} \\
\quad\quad |\ \ a, b := A, B \\
\quad\quad ;\ \ \underline{\mathrm{do}}\ b \neq 0 \rightarrow a, b := b, a \bmod b\ \underline{\mathrm{od}} \\
\quad\quad\quad \{\ a = A \text{ ggd } B\ \} \\
\quad\quad]| \\
]|
\end{array}
$$

Vergelijk (de lengte van) de vorige tabel maar eens met deze

a	b
6860	1176
1176	980
980	196
196	0

Fibonacci

We beginnen maar met de vraag hoeveel stappen het kost om F_n uit te rekenen. Hiertoe observeren we dat als T_n het aantal aanroepen is om F_n te bepalen, dan is

$$\begin{array}{rcl} T_0 & = & 1 \\ T_1 & = & 1 \\ T_{n+2} & = & T_n + T_{n+1} + 1 \end{array}$$

Met inductie volgt dan $T_n = 2F_{n+1} - 1$. En daar

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

(wat eenvoudig met inductie is te controleren) weten we dat

$$T_n \approx \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Maar dit terzijde.

Voor we een snel algoritme verzinnen moeten we ons eerst bezinnen op de huidige resultaten. We hadden een redelijk snel maar vreemd geformuleerd algoritme gevonden:

$$\begin{array}{rcl} G & \in & I\!N \longrightarrow I\!N^2 \\ G_0 & = & (0,1) \\ G_{n+1} & = & (b, a+b) \ \underline{\text{where}}\ (a,b) = G_n \end{array}$$

We zien hierbij wel goed geïllustreerd dat (F_n, F_{n+1}) en (F_{n+1}, F_{n+2}) een *lineaire combinatie* vormen. We kunnen de zogeheten <u>where</u>–clause dan ook elimineren met een matrixvermenigvuldiging. Immers,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot a + 1 \cdot b \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$$

zodat

$$\begin{array}{rcl} G & \in & I\!N \longrightarrow I\!N^2 \\ G_0 & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ G_{n+1} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} G_n \end{array}$$

Maar dat betekent dat

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en aangezien we in intermezzo 4 op pagina 78 gezien hebben dat machtsverheffen logaritmisch kan, is ons probleem opgelost.

$$
\begin{array}{l}
|[\ \mathrm{con}\ N\ :\ \text{int}\ \{\ N \geq 0\ \} \\
|\quad |[\ \mathrm{var}\ n, a, b\ :\ \text{int};\ X\text{: matrix} \\
\quad\ |\ \ X, n, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, N, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\qquad \{\ \text{invariant: } X^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \wedge\ 0 \leq n\ \} \\
\quad\ ;\ \ \underline{\text{do}}\, n \neq 0 \rightarrow \\
\qquad\qquad \underline{\text{if}}\ \ n \bmod 2 = 0 \rightarrow X, n := X \cdot X, n \operatorname{div} 2 \\
\qquad\qquad \square\ \ n \bmod 2 = 1 \rightarrow n, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := n - 1, X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
\qquad\qquad \underline{\text{fi}} \\
\qquad \underline{\text{od}} \\
\qquad \{\ n = 0\ \wedge\ X^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_N \\ F_{N+1} \end{pmatrix}\ \} \\
\qquad \{\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_N \\ F_{N+1} \end{pmatrix}\ \} \\
\quad\ ]| \\
]|
\end{array}
$$

Nu kan ik me voorstellen dat u niet zo gecharmeerd bent van matrixvermenigvuldigingen als programma-primitivium. Maar dat is ook niet nodig want we kunnen de matrix X implementeren met *twee* integers α, β: X heeft namelijk altijd de vorm $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$.

```
|[ con N : int { N ≥ 0 }
|  |[ var n, a, b, α, β : int
   |  α, β, n, a, b := 0, 1, N, 0, 1
   ;  do n ≠ 0 →
         if  n mod 2 = 0
         → α, β, n := α·α+β·β, α·β+β·α+β·β, n div 2
         []  n mod 2 = 1
         → n, a, b := n − 1, α·a+β·b, β·a+α·b+β·b
         fi
      od
      { a = F_N }
   ]|
]|
```

Wist u, ter uitsmijting, dat de Fibonacci getallen distribueren over de grootste gemene deler?

$$F_{x \,\mathrm{ggd}\, y} = F_x \ \mathrm{ggd}\ F_y$$

8 Mathe Magie

Wiskunde

De magie is er nog niet af, maar de mathematica gaat een wat prominentere rol spelen. De verhalen worden voor de geïnteresseerden (gevorderden?), maar ik heb mijn best gedaan ze leesbaar te houden.

8.1 Hoe natuurlijk zijn getallen?

Een van de meest fundamentele wiskundige begrippen is de *verzameling*. Zo kennen we de verzameling cijfers:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

en de verzameling *natuurlijke getallen*, in de wiskunde vaak $\mathbb{N}$ genoemd:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

We zien dat de verzameling cijfers eindig is—zij bevat 10 elementen—terwijl de verzameling natuurlijke getallen oneindig is (zij bevat oneindig veel elementen). De wiskunde kent meer oneindige verzamelingen. De gehele getallen:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

de rationale getallen ($\mathbb{Q}$ bevat naast alle gehele getallen ook alle gebroken getallen (breuken)) en de verzameling reëele getallen ($\mathbb{R}$, die naast $\mathbb{Q}$ ook irrationele getallen (wortels, π) bevat) om er maar een paar te noemen.
Het zal duidelijk zijn dat de verzamelingen, in de gegeven volgorde, steeds groter worden. Hiermee bedoel ik dat er voor elke verzameling elementen bestaan die niet in haar voorganger voorkomen. Maar om nu te zeggen dat $\mathbb{Z}$ meer elementen dan $\mathbb{N}$ bevat, is *not done* onder wiskundigen, beide hebben er immers oneindig veel.
Maar wiskundigen zijn ook maar mensen. Krijgen ze met veel verschillende oneindige verzamelingen te maken, dan willen ze die ordenen. Zo vinden ze $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ van dezelfde ordegrootte; beide verzamelingen heten *aftelbaar oneindig*.

Een verzameling is aftelbaar oneindig als we *alle* elementen van die verzameling volgens een consistent systeem kunnen nummeren. Een geschikte aftelling voor $\mathbb{N}$ is natuurlijk de identiteit: 1 krijgt nummer 1, 2 krijgt nummer 2, n krijgt nummer n. Voor $\mathbb{Z}$ gaat dat als volgt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{Z} & \longleftarrow & -3 & -2 & -1 & 0 & +1 & +2 & +3 & \longrightarrow \\ \mathbb{N} & \longleftarrow & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & \longrightarrow \end{array}$$

We "ritsen" de negatieve getallen tussen de positieve getallen, waarvan we de nummers verdubbeld hebben. We hebben dus een aftelling gevonden voor $\mathbb{Z}$, dus de gehele getallen vormen een aftelbare verzameling.

Hoe zit dat nu met de gebroken getallen. $\mathbb{Q}$ is weer wat "groter" dan $\mathbb{Z}$. En wel erg veel groter: tussen twee opvolgende gehele getallen (bijvoorbeeld 0 en 1) zitten oneindig veel breuken!

$$1 > \frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000} > \ldots > 0$$

Is $\mathbb{Q}$ nog wel aftelbaar?

8.2 Hoe reëel zijn de reële getallen?

Als iemand voor de eerste keer met de getalsverzamelingen wordt geconfronteerd, dan lijkt $\mathbb{Q}$ het einde van de rit: "$\mathbb{Q}$ bevat alle getallen". Tot zijn grote schrik wordt kort daarop $\mathbb{R}$ geïntroduceerd, met de mededeling dat $\mathbb{R}$ echt groter is dan $\mathbb{Q}$. Zo schijnen π en $\sqrt{2}$ wel in $\mathbb{R}$ maar niet in $\mathbb{Q}$ te zitten.

Als u aangetoond heeft dat bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ niet in $\mathbb{Q}$ zit, gaat u natuurlijk vol spanning uitzoeken of $\mathbb{R}$ nog wel aftelbaar is. (Oeps, nu verraad ik het antwoord op vraag 8.1.)

8.3 Machtsverheffen

Wiskundigen verzinnen de getalsverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ niet omdat ze zich vervelen, ze zijn een logisch vervolg op elkaar. Je bent baby en je leert optellen, kortom, je bent

in het $\mathbb{N}$ stadium: je krijgt een koekje van je vader, en als hij niet kijkt pak je er zelf nog twee en dan heb je er drie.
Als je zo oud bent dat je zulke eigenwijze dingen doet moet je ook leren aftrekken: moeder pakt ze alle drie af. Oeps, denken wiskundigen dan, dat gaat maar net goed: $3 - 3$. Maar wat moeten we nu met $3 - 5$? En toen maakten ze maar snel $\mathbb{Z}$ en ze leefden gelukkig, maar niet lang.
Want de peuter werd groter, en zijn moeder had al twee keer drie koekjes afgepakt (zes dus). En dus is zes gedeeld door twee drie. Maar voor zes gedeeld door vier heb je $\mathbb{Q}$ nodig. En dat is dan ook een van de dingen die ze je op de lagere school proberen aan te praten.
Maar toen onze kleuter naar de middelbare school ging werd zijn arsenaal binaire operatoren nog verder vergroot. Na optellen (aftrekken) en vermenigvuldigen (herhaald optellen, met tegenhanger delen (herhaald aftrekken)) komt het herhaald vermenigvuldigen: machtsverheffen.
Zo is $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ en dus is $\sqrt[5]{243} = 3$. Maar je bent wiskundige en je wilt wat: $\sqrt[5]{244}$ om maar wat te noemen. En zo kwam $\mathbb{R}$. Herhaald machtsverheffen heeft nu werkelijk geen hond nodig (en wiskundigen ook nauwelijks: zie Ackermann), dus uitbreidingen zijn niet echt nodig.

Maar zijn alle operaties nu *gesloten* onder $\mathbb{R}$? Zit $3^{\sqrt{2}}$ wel in $\mathbb{R}$? Ja! Maar een aardigere vraag is: bestaat er een reëel getal x, zó dat $x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$?

8.4 Priemgetallen

Een simpele vraag: hoeveel priemgetallen zijn er? Voor de volledigheid: een priemgetal is een positief getal dat alleen deelbaar is door 1 en door zichzelf (met uitzondering van 1 zelf).

8.5 Machtreeksen

Een alleraardigste truc uit de wiskunde is de machtreeks. Een machtreeks is niets anders dan een polynoom van graad oneindig. Wat daar nu aardig aan is? Sommige machtreeksen lijken verdacht veel op “gewone” functies zoals $\sin x$, e^x of

$\frac{1}{1-x}$. Zo zagen we al in intermezzo 1 op pagina 22 dat voor $|x| < 1$ geldt

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots$$

Maar, zoals reeds opgemerkt, ook voor e^x kunnen we zo'n machtreeks vinden. We zoeken een polynoom $p(x)$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

zodanig dat $p(x) = e^x$. Natuurlijk is het eenvoudig om a_0 te bepalen. Immers, we weten dat $e^0 = 1$ en dus moet ook $p(0) = 1$ dus is $a_0 = 1$. Maar hoe vinden we de andere coëfficienten?
Daartoe halen we een andere grote wiskundetruc van stal: differentiëren. Aangezien $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ vinden we, met

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots$$

dat $p'(0) = a_1 = e^0 = 1$. En wat houdt ons tegen dit succes voort te zetten:

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \ldots$$

En ook nu geldt weer $p''(x) = e^x$ dus $p''(0) = 2a_2 = e^0 = 1$ en dus $a_2 = \frac{1}{2}$. En nogmaals differentiëren geeft $6a_3 = 1$ ofwel $a_3 = \frac{1}{6}$:

$$p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$

Algemeen geldt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eenmaal gedifferentieerd

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

tweemaal gedifferentieerd

$$p''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k$$

en n-maal gedifferentieerd

$$p^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\cdots(k+n)a_{k+n}x^k$$

zodat $p^{(n)}(0) = (0+1)(0+2)\cdots(0+n)a_{0+n}x^0 = n!a_n = 1$ en dus $a_n = \frac{1}{n!}$ zodat we officieel vinden voor e^x:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Aangespoord door dit succes, gaat u nu natuurlijk onmiddellijk de machtreeksen voor $\sin x$ en $\cos x$ bepalen.

8.6 De cirkelconstante

Een constante uit de wiskunde met een respectabele staat van dienst is natuurlijk π (de constante 1 is waarschijnlijk nóg iets ouder). Zij geeft de verhouding weer tussen de omtrek en de diameter van een cirkel.
Praktisch als wiskundigen vroeger waren, tekenden ze een cirkel, maten de diameter en de omtrek, berekenden het quotiënt en vonden $3,\ldots$. Eeuwenlang is de speurtocht naar de verre decimalen van π geweest. Vroeger werd meetkunde te hulp geroepen, later ordinaire rekenkunde. Men ontdekte reeksen als

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ldots$$

Nu is dit geen snelle reeks, en hij is dus zeker niet geschikt om—bijvoorbeeld met behulp van een computer—π uit te rekenen. Maar kunt u desalniettemin aantonen dat hij, althans in principe, gebruikt zou kunnen worden om de volgende waterval te produceren:

$\pi =$ 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230
78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582
23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193

85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288
10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432
66482 13393 60726 02491 41273

8.7 De vier constanten

Een van de aardigste wiskundige stellingen betreft een relatie tussen de vier groten uit de wiskunde: de constanten 1, π, e en i.

$$e^{\pi i} = -1$$

waarbij $\pi = 3,14159265\ldots$, $e = 2,71828\ldots$, i het mysterieuze lettertje met de eigenschap dat $i^2 = -1$ en -1, tja, dat is gewoon -1. Kunt u bovenstaand verband bewijzen?

Antwoorden

Hoe natuurlijk zijn getallen?

Voor ik het “echte” bewijs presenteer zal ik het begrip aftelbaarheid nog eens illustreren aan de hand van het Hilbert Hotel. David Hilbert, een beroemd wiskundige aan het begin van deze eeuw, was de eigenaar van een hotel. En zonder te overdrijven mogen we stellen dat het een gróót hotel was, het had aftelbaar oneindig veel kamers.

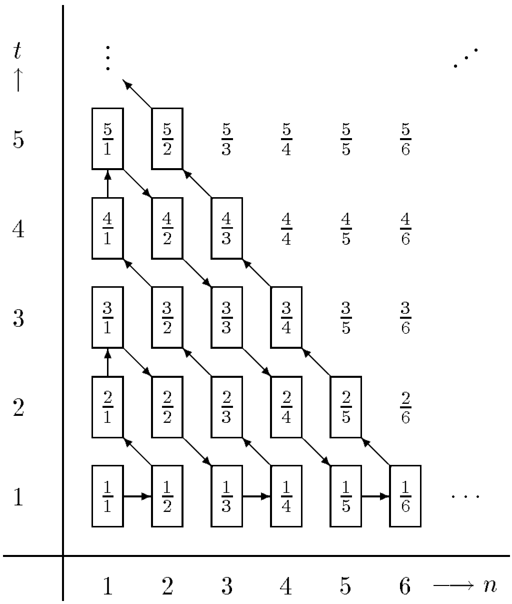
Die kamers waren natuurlijk genummerd; wat verwacht je anders met een wiskundige als eigenaar—en trouwens, die moderne mode om kamers te identificeren door elke deur een andere kleur te geven lijkt me niet echt handig als je meer dan vijf (oké, twintig) kamers hebt. Maar het hotel was niet voor niets zo groot, de zaken liepen goed. Zoals wel vaker, was het ook deze nacht vol. Op kamer $\boxed{1}$ zit gast 1, op kamer $\boxed{2}$ gast 2, etc.

Toch probeert een late gast nog een kamer te krijgen. De portier weet dat het hotel vol zit en trekt daaruit de conclusie dat er geen kamer voor de nieuwkomer is. Maar onder de bezielende leiding van Hilbert zelf wordt daar een mouw aan gepast. Hij laat alle gasten één kamer opschuiven: gast 1 naar kamer $\boxed{2}$, gast 2 naar $\boxed{3}$ etc., zodat kamer $\boxed{1}$ vrij komt voor de laatkomer. De portier is met stomheid geslagen.

Dan komt er een clubje Japanners, 30 stuks. “Vol” weet de portier te melden. Natuurlijk niet, vindt Hilbert. De gast van kamer $\boxed{1}$ moet gewoon naar kamer $\boxed{31}$, die van $\boxed{2}$ naar $\boxed{32}$ en zo voorts. Zo komen de kamers $\boxed{1}$ tot en met $\boxed{30}$ vrij. Plaats voor alle Japanners.

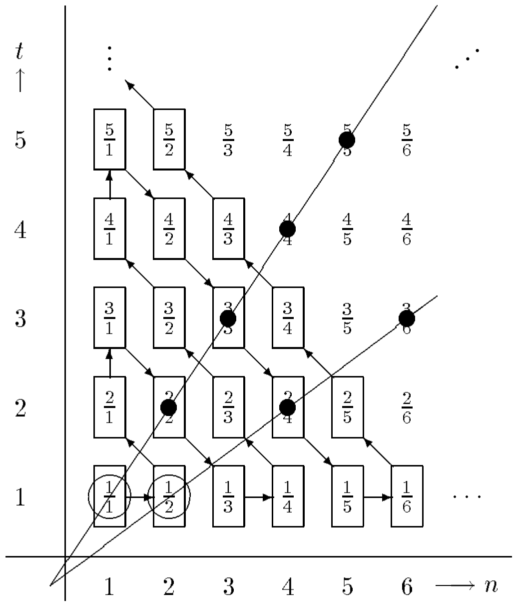
Maar dan komt er een bus met aftelbaar veel gasten. Dat zijn er wel heel erg veel, vindt de portier. Hij heeft wel wat geleerd, de vorige twee keer, maar hij ziet in dat je de gast van kamer $\boxed{1}$ niet naar kamer “oneindig” kan sturen. Hij waant zich dan ook in het gelijk als hij meldt dat er geen plaats meer is. Maar die irritante baas van hem weet het alweer beter. Hij laat de zittende gasten verhuizen naar een kamer met een dubbel nummer. Dus $\boxed{1}$ naar $\boxed{2}$, $\boxed{2}$ naar $\boxed{4}$, $\boxed{3}$ naar $\boxed{6}$. Op deze manier komen alle oneven kamers vrij. Zodat alle gasten geholpen kunnen worden.

Deze laatste truc, noemde ik in de opgaven “ritsen” en we hebben hem voor het bewijs van de aftelbaarheid van $\mathbb{Q}$ weer nodig. We beschouwen namelijk eerst alleen de positieve elementen van $\mathbb{Q}$. We plaatsen ze in een tabel: op rij t ($t \geq 1$) komen alle breuken met teller t, in kolom n ($n \geq 1$) alle breuken met noemer n. Merk op dat *alle* positieve elementen van $\mathbb{Q}$ inderdaad in de tabel staan.



De pijlen geven de volgorde aan waarin we de elementen nummeren. Om de aftelling te completeren, moeten we nog de 0 (nul) toevoegen (de late gast van het Hilbert Hotel) én de negatieve getallen inritsen (de bus met aftelbaar veel gasten voor het Hilbert Hotel).

Voor de fijnslijpers: de verzameling uit de tabel *is* niet $\mathbb{Q}$; zij *omvat* hem wel (en is aftelbaar) dus $\mathbb{Q}$ is ook aftelbaar. In de wiskunde worden $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ namelijk gewoonlijk beschouwd als verschillende *notaties* voor hetzelfde getal (net als $0,2$ en $\frac{1}{5}$, en $0,\not{9}$ en 1 overigens).
Wij hebben echter gedaan alsof ze verschillende elementen zijn (we nemen ze immers beide in de aftelling op). Voor een aftelling van $\mathbb{Q}$ moeten we die dubbele dus verwijderen. Dat gaat heel makkelijk als we voor elk element uit de tabel de "halve" lijn vanuit de oorsprong door dat element trekken en alle elementen op die lijn, op het element dat het dichtst bij de oorsprong ligt na, wegstrepen. In onderstaande tabel hebben we dat gedaan voor de *breuken* $\frac{1}{1}$ en $\frac{1}{2}$.



Overigens, een hotel moet schoongemaakt worden. En een van de redenen dat Hilbert zo goed boerde, was dat hij slechts één schoonmaker had. En die klaagde dan ook steen en been over die enorme klus. Maar ach, Hilbert nam het allemaal niet zo nauw met de hygiëne, en gaf het volgende advies:

kamer $\boxed{1}$, die doe je goed, daar poets je een vol uur op. Zij wordt vaak gebruikt, en je moet nog wat routine opdoen. De volgende kamer gaat al een stuk sneller, die doe je in een half uur. Kamer $\boxed{3}$ kost nog maar een kwartier, $\boxed{4}$ $12\frac{1}{2}$ minuut en zo voorts. Dan kan je dus over twee uur naar huis...
Voor insiders, dit is een machtreeks à la intermezzo 1 op pagina 22:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

Hoe reëel zijn de reële getallen?

We bewijzen uit het ongerijmde dat $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Stel dat $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Het is duidelijk dat $\sqrt{2} > 0$. Dus bovenstaande aanname leidt tot een $t \in \mathbb{N}$ en een $n \in \mathbb{N}$, zó dat $\frac{t}{n} = \sqrt{2}$ en bovendien zó dat t en n copriem zijn (geen gemeenschappelijke delers hebben). Anders geformuleerd: de breuk $\frac{t}{n}$ is niet vereenvoudigbaar.
Maar als $\frac{t}{n} = \sqrt{2}$, dan ook $(\frac{t}{n})^2 = \sqrt{2}^2$ ofwel $\frac{t^2}{n^2} = 2$ dus $t^2 = 2n^2$. Dus weten we dat t^2 even is, en dus is t even. We kunnen dan voor t schrijven $t = 2t'$ voor een of andere $t' \in \mathbb{N}$. Maar als $\frac{2t'}{n} = \sqrt{2}$, dan ook $(\frac{2t'}{n})^2 = \sqrt{2}^2$ ofwel $\frac{4t'^2}{n^2} = 2$ dus $4t'^2 = 2n^2$ ofwel $n^2 = 2t'$. Dus weten we dat n^2 even is, en dus is n even. We kunnen dan voor n schrijven $n = 2n'$ voor een of andere $n' \in \mathbb{N}$.
Maar dat betekent dat onze “oude” onvereenvoudigbare breuk $\frac{t}{n}$ te schrijven is als de vereenvoudigbare breuk $\frac{2t'}{2n'}$. Wat tegenstrijdig is. Onze aanname was dus fout: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!
(einde bewijs)

Nu vragen we ons af of $\mathbb{R}$ dan nog wel aftelbaar is. Dat dit niet zo is bewijzen we, wederom uit het ongerijmde, met de diagonalisatiestelling van Cantor.
Stel $\mathbb{R}$ is aftelbaar. Per definitie bestaat er dan een aftelling van alle elementen van $\mathbb{R}$. We kunnen dan een (oneindige) lijst maken met op regel n het n-de getal uit de aftelling, genoteerd als een oneindig doorlopende decimale breuk (mocht

de breuk een eindige decimale notatie hebben, vul hem dan aan met nullen).
We zijn nu echter in staat een getal x te construeren dat *niet* op deze lijst voorkomt. De i-de decimaal van x kiezen we gelijk aan $1+$ de i-de decimaal van het i-de getal op de lijst (een 9 wordt hierbij een 0). Zie ter illustratie onderstaande tabel.

$$\begin{array}{c|l} 1 & 0,\mathbf{0}0000000\ldots \\ 2 & 0,0\mathbf{1}010101\ldots \\ 3 & 0,02\mathbf{3}23232\ldots \\ 4 & 0,476\mathbf{8}9934\ldots \\ 5 & 0,5576\mathbf{3}880\ldots \\ 6 & 0,78002\mathbf{9}31\ldots \\ \vdots & \vdots \\ \hline x & 0,124940\ldots \end{array}$$

Dit nieuwe reële getal staat niet op de lijst en komt dus niet voor in de aftelling van $\mathbb{R}$. Tegenspraak. Dus $\mathbb{R}$ is dus niet aftelbaar.

Machtsverheffen

We willen weten of $\exists x \in \mathbb{R} : x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Onderstaand schema geeft het bewijs zónder zo'n x aan te wijzen! Dit heet een existentie-bewijs. Het maakt gebruik van gevalsonderscheid naar de rationale getallen ($\mathbb{Q}$) en de irrationale getallen, laten we die even $\mathbb{E}$ dopen:

$$\mathbb{R} = \mathbb{E} + \mathbb{Q}$$

We leiden af:

1	$\boxed{3^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}}$	
2	$3^{\sqrt{2}} \in \mathbb{E} \ \vee \ 3^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$	Definitie $\mathbb{R}$ (1)
3	$\boxed{3^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}}$	Gevalsonderscheid (2)
4	$3 \in \mathbb{R}$	Basiskennis
5	$\exists x \in \mathbb{R} : x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$	Introductie $\exists$ (3,4)
6	$\boxed{3^{\sqrt{2}} \in \mathbb{E}}$	Gevalsonderscheid (2)
7	$(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$	
8	$= 3^2 = 9 \in \mathbb{Q}$	Basiskennis
9	$3^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$	Herhaal (1)
10	$\exists x \in \mathbb{R} : x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$	Introductie $\exists$ (8,9)
11	$\exists x \in \mathbb{R} : x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$	Uitgesloten derde (2,5,10)

Priemgetallen

Het antwoord is ook heel eenvoudig: oneindig veel. Stel namelijk dat de rij van *alle* priemgetallen ophield. En dat P het produkt van al deze getallen is. Het getal $P+1$ is dan groter dan alle elementen van de rij, dus geen element van die rij, en dus niet priem.
Daaruit volgt dat $P+1$ delers heeft—naast 1 en zichzelf. Laat nu p de kleinste deler (ongelijk 1) van $P+1$ zijn. Dit is dan een zogeheten priemdeler van $P+1$, belangrijk is dat p een priemgetal is. Anderzijds is geen der elementen van de rij der priemgetallen een deler van $P+1$ (er blijft na deling altijd een rest van 1 over). Dus priemgetal p staat niet in onze lijst. Tegenspraak; de veronderstelling is onjuist: er zijn oneindig veel priemgetallen.

Machtreeksen

Zo eenvoudig als onze differentieer-invultruc ging bij e^x, is natuurlijk meer uitzondering dan regel. De afgeleide van e^x is e^x, maar de afgeleide van $\sin x$ is $\cos x$. En dat brengt ons op het idee om de reeksen voor $\sin x$ en $\cos x$ maar tegelijkertijd te bepalen. Immers, de afgeleide van $\cos x$ is weer $-\sin x$. We stellen dus

$$\begin{aligned}\sin x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \ldots \\ \cos x &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 \ldots\end{aligned}$$

En we beginnen met $\sin 0 = a_0 = 0$ en $\cos 0 = b_0 = 1$. En dan differentiëren we beide reeksen:

$$\begin{aligned}\sin' x &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 \ldots = \cos x \\ \cos' x &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 + 5b_5 x^4 \ldots = -\sin x\end{aligned}$$

zodat we vinden $\sin' 0 = a_1 = \cos 0 = 1$ en $\cos' 0 = b_1 = -\sin 0 = 0$. En zo gaan we verder:

$$\begin{aligned}\sin'' x &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 \ldots = -\sin x \\ \cos'' x &= 2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2 + 20b_5 x^3 \ldots = -\cos x\end{aligned}$$

zodat we vinden $\sin'' 0 = 2a_2 = -\sin 0 = 0$ en $\cos'' 0 = 2b_2 = -\cos 0 = -1$ en dus $a_2 = 0$ en $b_2 = -\frac{1}{2}$. Dit leidt uiteindelijk tot

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \ldots\end{aligned}$$

Vroeger moest je nog uit je hoofd leren

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Nu zeggen we gewoon

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \ldots}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 \ldots \\ &= 1\end{aligned}$$

De cirkelconstante

We brengen even de volgende machtreeks in herinnering (zie opgave 8.5 of zie intermezzo 1 op pagina 22):

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + \ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! [212175710912\sqrt{61} + 1657145277365+}{(n!)^3 (3n)! [5280(236674+}$$

hierin substitueren we voor r de waarde $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots$$

en dan integreren we

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$$

zodat we vinden (immers $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\arctan = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$$

En dan is het een peuleschil. Immers $\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$ dus, na substitutie van 1 voor x vinden we

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Wiskundigen zijn overigens “verbaasd” over dit resultaat. De verzameling der rationele getallen ($\mathbb{Q}$) is immers gesloten onder optellen: als $a \in \mathbb{Q}$ en $b \in \mathbb{Q}$ dan is ook $a + b \in \mathbb{Q}$. Uit het voorbeeld hierboven zien we dat de geslotenheid niet opgaat voor oneindige sommaties: 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ etc. komen uit $\mathbb{Q}$ maar $\frac{1}{4}\pi$ zit duidelijk niet in $\mathbb{Q}$. We kunnen $\mathbb{R}$ dan ook zien als de *afsluiting* van $\mathbb{Q}$: voeg aan $\mathbb{Q}$ die getallen toe die kunnen optreden als som van een of andere (convergente) reeks.
De hier berekende reeks convergeert zéér langzaam naar π. Beter is die grote formule boven aan de pagina. Hij is geïnspireerd op reeksen van Ramanujan. Elke term levert ongeveer 25 decimalen extra op.

$$+n(13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750)]$$
$$+30303\sqrt{61})]^{3n+3/2}$$

Voor de gewone sterveling die thuis op z'n PC'tje ook wat wil proberen nog de volgende tip. Begin met $y_0 = \sqrt{2} - 1$ en $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ en itereer vervolgens

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}}$$

$$a_{n+1} = a_n(1 + y_{n+1})^4 - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2)$$

Na elke slag is het aantal cijfers verviervoudigd: 8, 41, 171, $694\ldots$ cijfers goed na 0, 1, 2, $3\ldots$ iteraties.

De vier constanten

Als je voor het eerst met i geconfronteerd wordt, dan frons je je wenkbrauwen, $i^2 = -1$? Dat kan toch niet? Nee, dat "kan" inderdaad niet, maar dat neemt niet weg dat je er aardige resultaten mee kunt boeken zonder precies te weten waarom. En je bent in goed gezelschap, wiskundigen hebben dat ook zo'n 200 jaar volgehouden.
Goed, $i^2 = -1$ dus $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$, $i^5 = i$, etc. We weten dat de machtreeksen voor e^x, $\sin x$ en $\cos x$ gelijk zijn aan (zie 8.5):

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

en dat betekent dat e^{iy} als volgt ontwikkelt:

$$
\begin{array}{ll}
& e^{iy} \\
= & \quad \{ \text{ machtreeks voor } e \ \} \\
& 1+iy+\frac{1}{2!}i^2y^2+\frac{1}{3!}i^3y^3+\frac{1}{4!}i^4y^4+\frac{1}{5!}i^5y^5+\frac{1}{6!}i^6y^6+\ldots \\
= & \quad \{ \text{ omrekenen machten van } i \ \} \\
& 1+iy-\frac{1}{2!}y^2-i\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+i\frac{1}{5!}y^5-\frac{1}{6!}y^6-i\frac{1}{7!}y^7+\ldots \\
= & \quad \{ \text{ bijeenvegen termen } \} \\
& (1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\frac{1}{6!}y^6\ldots)+i(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\frac{1}{7!}y^7\ldots) \\
= & \quad \{ \text{ machtreeksen voor } \sin \text{ en } \cos \ \} \\
& \cos y + i \sin y
\end{array}
$$

En als we dat op de middelbare school al hadden geweten, dan hadden we ons heel wat uit het hoofd leren kunnen besparen, immers:

$$
\begin{array}{ll}
& \cos(a+b) + i\sin(a+b) \\
= & \quad \{ \text{ def } e^{ix} \ \} \\
& e^{i(a+b)} \\
= & \quad \{ \text{ distributie } \} \\
& e^{ia} \times e^{ib} \\
= & \quad \{ \text{ def } e^{ix} \ 2\times \ \} \\
& (\cos a + i\sin a) \times (\cos b + i \sin b) \\
= & \quad \{ \text{ uitvermenigvuldigen } \} \\
& \cos a \cos b + i\cos a \sin b + i \sin a \cos b - \sin a \sin b \\
= & \quad \{ \text{ bijeenvegen termen } \} \\
& (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\cos a \sin b + \sin a \cos b)
\end{array}
$$

en dus is $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (het reeële deel) en $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ (het imaginaire deel). Wat bijvoorbeeld ook ontzettend lekker gaat is integreren van die gonio-gevallen, ook bij hogere machten. Merk op dat

$$e^{ix}+e^{-ix} = \cos x + i\sin x + \cos -x + i \sin -x = 2\cos x$$

$$e^{ix}-e^{-ix} = \cos x + i\sin x - (\cos -x + i \sin -x) = 2i\sin x$$

zodat

$$
\begin{array}{lcl}
\cos x & = & \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x & = & \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
\end{array}
$$

We vinden dan

INTERMEZZO 7
Hyperbolische functies

De functies sinus hyperbolicus en cosinus hyperbolicus zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

dus $\cosh ix = \cos x$ en $\sinh ix = i \sin x$ (en trouwens ook $\cosh x = \cos ix$ en $i \sinh x = \sin ix$). Verklaart dat de naam?

$$\begin{aligned}
& \int \cos^3 x \, dx \\
= & \quad \{ \text{ als boven } \} \\
& \frac{1}{2^3} \int (e^{ix} + e^{-ix})^3 \, dx \\
= & \quad \{ \text{ uitvermenigvuldigen } \} \\
& \frac{1}{2^3} \int 1e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + 1e^{-3ix} \, dx \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
& \frac{1}{8} \int e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix} \, dx \\
= & \quad \{ \text{ integreren } \} \\
& \frac{1}{8} \left(\frac{e^{3ix}}{3i} + \frac{3e^{ix}}{i} + \frac{3e^{-ix}}{-i} + \frac{e^{-3ix}}{-3i} \right) + C \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
& \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + 6 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) + C \\
= & \quad \{ \text{ als boven } \} \\
& \frac{1}{8} (\frac{2}{3} \sin 3x + 6 \sin x) + C \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
& \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C
\end{aligned}$$

Pas echter op. Niet alle eigenschappen uit $\mathbb{R}$ gelden in $\mathbb{C}$.

Zo zou je het volgende betoog kunnen houden:

$$
\begin{array}{ll}
 & e \\
= & \quad \{\ x = x^1\ \} \\
 & e^1 \\
= & \quad \{\ \text{calculus}\ \} \\
 & e^{\frac{2\pi i}{2\pi i}} \\
= & \quad \{\ \text{calculus}\ \} \\
 & (e^{2\pi i})^{\frac{1}{2\pi i}} \\
= & \quad \{\ \text{def } e^{ix}\ \} \\
 & (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^{\frac{1}{2\pi i}} \\
= & \quad \{\ \text{calculus}\ \} \\
 & 1^{\frac{1}{2\pi i}} \\
= & \quad \{\ 1^x = 1\ \} \\
 & 1
\end{array}
$$

Echter, in $\mathbb{C}$ geldt niet voor alle a, b en c dat $a^{b\,c} = (a^b)^c$.

Maar goed, de vier constanten. Dat mag met al deze kennis geen probleem meer vormen:

$$
\begin{array}{ll}
 & e^{\pi i} \\
= & \quad \{\ \text{def } e^{ix}\ \} \\
 & \cos \pi + i \sin \pi \\
= & \quad \{\ \text{calculus}\ \} \\
 & -1 + i \cdot 0 \\
= & \quad \{\ \text{calculus}\ \} \\
 & -1
\end{array}
$$

Index